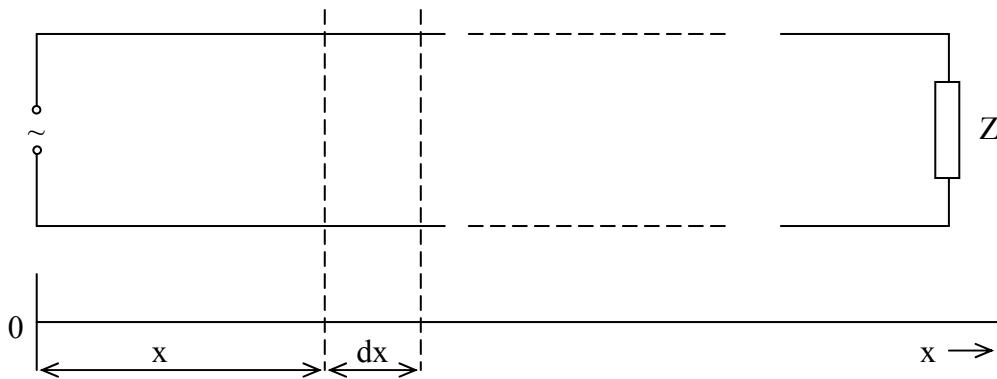


2. ZÁKLADY ELEMENTÁRNEJ TEÓRIE VEDENÍ

V tejto kapitole uskutočníme rozbor procesov, ktoré vznikajú pri šírení elektromagnetických vln pozdĺž **mikrovlnového dvojvodičového vedenia**. Dôsledne vyšetrovať tieto procesy možno na základe použitia teórie elektromagnetického poľa. Pre niektoré aplikácie však môžeme vyšetrovať tieto procesy aj z hľadiska teórie obvodov.

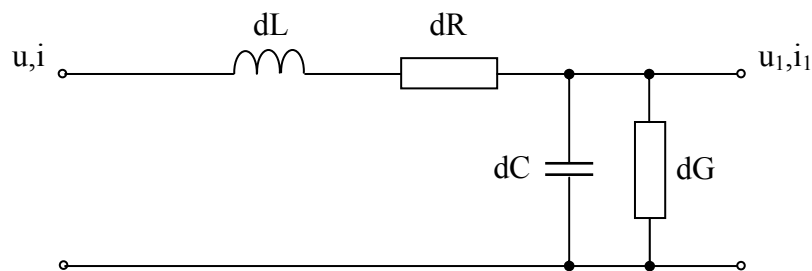


Obr.2.1

Dlhé dvojvodičové vedenie

Ako príklad uvažujme obvod podľa obr. 2.1, tvorený vf generátorom a dvoma dlhými paralelnými vodičmi (ktoré tvoria dvojvodičové vedenie) zakončenými impedanciou Z - tzv. dlhé vedenie. Každý element takéhoto vedenia, obklopený zodpovedajúcim elektromagnetickým poľom, bude mať súčasne určitú kapacitu, indukčnosť a odpor. To znamená, že elektrické parametre tohoto obvodu (t.j. veličiny R, L, C) sú spojité rozložené pozdĺž jeho dĺžky. Takýto obvod nazývame **obvodom s rozloženými parametrami**.

Pre obvod s rozloženými parametrami na obr. 2.1, nie je možné priamo zapísať Kirchoffove rovnice ako pre obvody so sústredenými parametrami. Namiesto toho si môžeme element vedenia s dĺžkou dx predstaviť v tvare náhradnej schémy (obr. 2.2), tvorenej veličinami dL , dC , dR a dG .



Obr.2.2

Náhradná schéma úseku vedenia

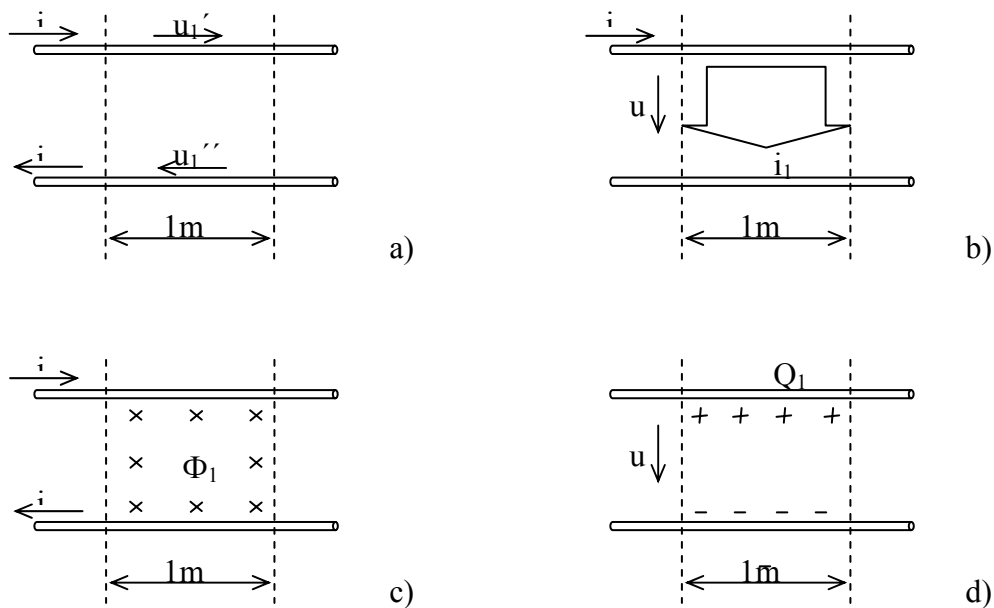
Veličina dL charakterizuje vzájomnú indukčnosť vodičov na dĺžke dx , dC - kapacitu medzi vodičmi dĺžky dx a dR - odpor vodičov dĺžky dx . Vodivosť dG je spôsobená nedokonalosťou izolácie medzi vodičmi a je určovaná zvodovými stratami medzi vodičmi.

Náhradná schéma celého vedenia je potom tvorené kaskádnym zapojením nekonečného počtu náhradných schém podľa obr. 2.2.

2.1. PRIMÁRNE PARAMETRE VEDENÍ

Z praktického hľadiska je výhodnejšie miesto veličín dL , dC , dR a dG používať tzv. **primárne parametre vedenia**, ktoré sú definované na jednotku dĺžky vedenia. Primárne parametre vedenia sú definované takto:

1. **Merný odpor** R_1 (Ω/m) je celkový odpor obidvoch vodičov na jednotku dĺžky. Keď tečie podľa obr. 2.3a vedením jednotkovej dĺžky konštantný prúd i , vzniká na vodičoch úbytok napätia $u_1 = u_1' + u_1''$



Obr.2.3

Definícia primárnych parametrov vedenia;
merný odpor (a), merná priečna vodivosť
(b), merná indukčnosť (c), merná kapacita

Potom platí

$$R_1 = \frac{dR}{dx} = \frac{u_1}{i} = \frac{u_1' + u_1''}{i} = R_1' + R_1'' \quad (2.1.1)$$

kde R_1' , R_1'' sú čiastkové merné odpory prvého a druhého vodiča.

2. **Merná priečna vodivosť** G_1 (S/m) je vodivosť medzi dvoma vodičmi vedenia na jednotku dĺžky. Je spôsobená najmä nedokonalosťou dielektrika (zvodom) medzi vodičmi. Keď označíme priečny zvodový prúd na jednotku dĺžky i_1 (obr. 2.3b), potom pri konštantnom napätí u platí

$$G_1 = \frac{dG}{dx} = \frac{i_1}{u} \quad (2.1.2)$$

3. **Merná indukčnosť** L_1 (H/m) je indukčnosť vedenia na jednotku dĺžky. Prúdu i_1 , ktorý podľa obr. 2.3c tečie vedením, zodpovedá vlastný magnetický tok Φ_1 prechádzajúci plochou medzi vodičmi vedenia na jednotku dĺžky.

Potom platí

$$L_1 = \frac{dL}{dx} = \frac{\phi_1}{i} \quad (2.1.3)$$

4. **Merná kapacita** C_1 (F/m) je kapacita medzi vodičmi na jednotku dĺžky. Keď je pri napätí u , akumulovaný (obr. 2.3d) na jednotku dĺžky vedenia náboj Q_1 , potom platí

$$C_1 = \frac{dC}{dx} = \frac{Q_1}{u} \quad (2.1.4)$$

Keď primárne parametre vedenia L_1 , C_1 , R_1 a G_1 nie sú funkciou x , t.j. sa nemenia pozdĺž vedenia, potom toto vedenie nazývame **regulárnym vedením** (resp. **pozdĺžne homogénnym** alebo skrátene **homogénnym vedením**).

2.2. TELEGRAFNÉ ROVNICE REGULÁRNEHO VEDENIA

Uvažujme regulárne vedenie určené primárnymi parametrami L_1 , C_1 , R_1 a G_1 . Aby sme našli hodnotu napätia a prúdu v ľubovoľnom bode pozdĺž vedenia, analyzujeme ľubovoľný element vedenia dx (obr. 2.1), vzdialený od jeho počiatku na vzdialenosť x . Označme napätie a prúd na vstupe elementu (t.j. v bode x) u a i . Potom hodnoty u_1 a i_1 na výstupe elementu (t.j. v bode $x + dx$) budú

$$\begin{aligned} u_1 &= f(x + dx, t) \\ i_1 &= \varphi(x + dx, t) \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Keď predpokladáme, že napätie a prúd sú spojitou funkciou x , potom veličiny u_1 a i_1 môžeme zapísať v tvare radu

$$\begin{aligned} u_1 &= f(x, t) + \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dx + \dots = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \dots \\ i_1 &= \varphi(x, t) + \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} dx + \dots = i + \frac{\partial i}{\partial x} dx + \dots \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Keď sa obmedzíme len na prvé dva členy týchto radov, potom platí

$$u_1 - u = \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad (2.2.3)$$

$$i_1 - i = \frac{\partial i}{\partial x} dx \quad (2.2.4)$$

Predpoklad o spojitosti funkcií napätia a prúdu bude zrejme splnený pre všetky vedenia, pre ktoré sa primárne parametre nemenia pozdĺž vedenia skokom.

Podľa náhradnej schémy elementu vedenia (obr. 2.2) platí, že rozdiel medzi veličinami u_1 a u je úmerný úbytkom napätia na sériovo zapojenom odpore $dR = R_1 dx$ a indukčnosti $dL = L_1 dx$

$$u - u_1 = iR_1 dx + L_1 \frac{\partial i}{\partial t} dx \quad (2.2.5)$$

Podobne prúd i_1 sa líši od prúdu i v dôsledku toho, že jeho časť tečie cez paralelne zapojenú kapacitu $dC = C_1 dx$ a vodivosť $dG = G_1 dx$

$$i - i_1 = G_1 u_1 dx + C_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} dx \quad (2.2.6)$$

Na pravej strane tejto rovnice možno veličinu u_1 s presnosťou na veličiny druhého rádu $O(dx^2)$ nahradiť veličinou u . Fyzikálne takáto zámena znamená, že v náhradnej schéme (obr. 2.2) elementu dx vedenia možno bod pripojenia paralelnej vetvy medzi horným a dolným vodičom vedenia vybrať ľubovoľne. Potom platí

$$i - i_1 = G_1 u dx + C_1 \frac{\partial u}{\partial t} dx \quad (2.2.7)$$

Dosadením z rovnice (2.2.5) do (2.2.3) a z (2.2.7) do (2.2.4) dostaneme

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = R_1 i + L_1 \frac{\partial i}{\partial t} \quad (2.2.8)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = G_1 u + C_1 \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.2.9)$$

Tieto diferenciálne rovnice určujú napätie a prúd pozdĺž vedenia a nazývame ich **telegrafnými rovnicami**.

Ďalší rozbor telegrafných rovníc zjednodušíme tým, že budeme predpokladať harmonický časový priebeh napätia a prúdu na vedení. Okamžité hodnoty $u(x,t)$ a $i(x,t)$ môžeme potom písať v tvare

$$u(x, t) = U(x)e^{j\omega t} \quad (2.2.10)$$

$$i(x, t) = I(x)e^{j\omega t} \quad (2.2.11)$$

kde $U(x)$, $I(x)$ sú fázory (komplexné amplitúdy) napätia a prúdu, $\omega = 2\pi f$ je kruhová frekvencia harmonického signálu. Dosadením tohto vyjadrenia do telegrafných rovníc (2.2.8) a (2.2.9) dostaneme

$$-\frac{dU(x)}{dx} = (R_1 + j\omega L_1)I(x) = Z_1 I(x) \quad (2.2.12)$$

$$-\frac{dI(x)}{dx} = (G_1 + j\omega C_1)U(x) = Y_1 U(x) \quad (2.2.13)$$

kde sme označili **pozdĺžnu mernú impedanciu vedenia**

$$Z_1 = R_1 + j\omega L_1 \quad (2.2.14)$$

a **priečnu mernú admitanciu vedenia**

$$Y_1 = G_1 + j\omega C_1 \quad (2.2.15)$$

Deriváciou rovnice (2.2.12) a dosadením z rovnice (2.2.13), podobne deriváciou rovnice (2.2.13) a dosadením z rovnice (2.2.12) dostaneme telegrafné rovnice v tvare

$$\frac{d^2 U(x)}{dx^2} = Z_1 Y_1 U(x) = \gamma^2 U(x) \quad (2.2.16)$$

$$\frac{d^2 I(x)}{dx^2} = Z_1 Y_1 I(x) = \gamma^2 I(x) \quad (2.2.17)$$

kde sme označili $\gamma^2 = Z_1 Y_1$.

Tieto rovnice majú tvar jednoduchých **vlnových rovníc**, ktoré opisujú priebeh harmonického napätia a prúdu pozdĺž vedenia v ustálenom stave.

Priebeh napätia pozdĺž vedenia je určený všeobecným riešením diferenciálnej rovnice (2.2.16) v tvare

$$U(x) = Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x} \quad (2.2.18)$$

kde A a B sú integračné konštanty a γ je koreň charakteristickej rovnice. Napätie je určené v tvare súčtu dvoch členov. Neskoršie ukážeme, že člen $A \exp(-\gamma x)$ určuje amplitúdu **napät'ovej vlny postupujúcej v kladnom smere osi x** a člen $B \exp(\gamma x)$ určuje amplitúdu **napät'ovej vlny postupujúcej v zápornom smere osi x** . Priebeh prúdu pre známe napätie $U(x)$ určíme z rovnice (2.2.12)

$$I(x) = -\frac{1}{Z_1} \frac{dU(x)}{dx} = \frac{\gamma}{Z_1} (Ae^{-\gamma x} - Be^{\gamma x}) \quad (2.2.19)$$

kde veličiny v zátvorkách sú napätia, preto súčiniteľ pred zátvorkou je admitancia

$$\frac{\gamma}{Z_1} = \frac{\sqrt{Z_1 Y_1}}{Z_1} = \sqrt{\frac{Y_1}{Z_1}} = Y_V \quad (2.2.20)$$

ktorú nazývame **vlnovou (charakteristickou) admitanciou vedenia**. Reciprokou hodnotou vlnovej admitancie Y_V je **vlnová impedancia vedenia**

$$Z_V = \frac{1}{Y_V} = \sqrt{\frac{Z_1}{Y_1}} = \sqrt{\frac{R_1 + j\omega L_1}{G_1 + j\omega C_1}} \quad (2.2.21)$$

Požítím tejto definície môžeme vzťah (2.2.19) písať v tvare

$$I(x) = \frac{1}{Z_V} (Ae^{-\gamma x} - Be^{\gamma x}) \quad (2.2.22)$$

Konštantu γ , zavedenú v rovniciach (2.2.16) a (2.2.17), nazývame **konštantou šírenia** v pozdĺžnom smere (t.j. pozdĺžnou konštantou šírenia). Vo všeobecnosti je konštanta šírenia komplexná

$$\gamma = \sqrt{Z_1 Y_1} = \sqrt{(R_1 + j\omega L_1)(G_1 + j\omega C_1)} = \alpha + j\beta \quad (2.2.23)$$

kde α je **merný (špecifický) útlm** vedenia (konštanta útlmu, tlmenie) a β je merný (špecifický) **fázový posun** (fázová konštanta). Rozmer α je m^{-1} , ale väčšinou sa vyjadruje v (dB/m). Rozmer β je m^{-1} .

Vlnovú impedanciu Z_V a konštantu šírenia γ nazývame tzv. sekundárnymi parametrami vedenia. **Sekundárne parametre vedenia** sú jednoznačne určené primárnymi parametrami vedenia. Výhodou sekundárnych parametrov je, že ich môžeme jednoduchšie určovať meraním ako primárne parametre.

Dosadením všeobecného riešenia (2.2.18) do vzťahu (2.2.10) dostaneme vyjadrenie pre okamžitú hodnotu napätia na vedení v mieste x a v čase t

$$u(x, t) = U(x)e^{j\omega t} = Ae^{-\gamma x} e^{j\omega t} + Be^{\gamma x} e^{j\omega t} = u^+(x, t) + u^-(x, t) \quad (2.2.24)$$

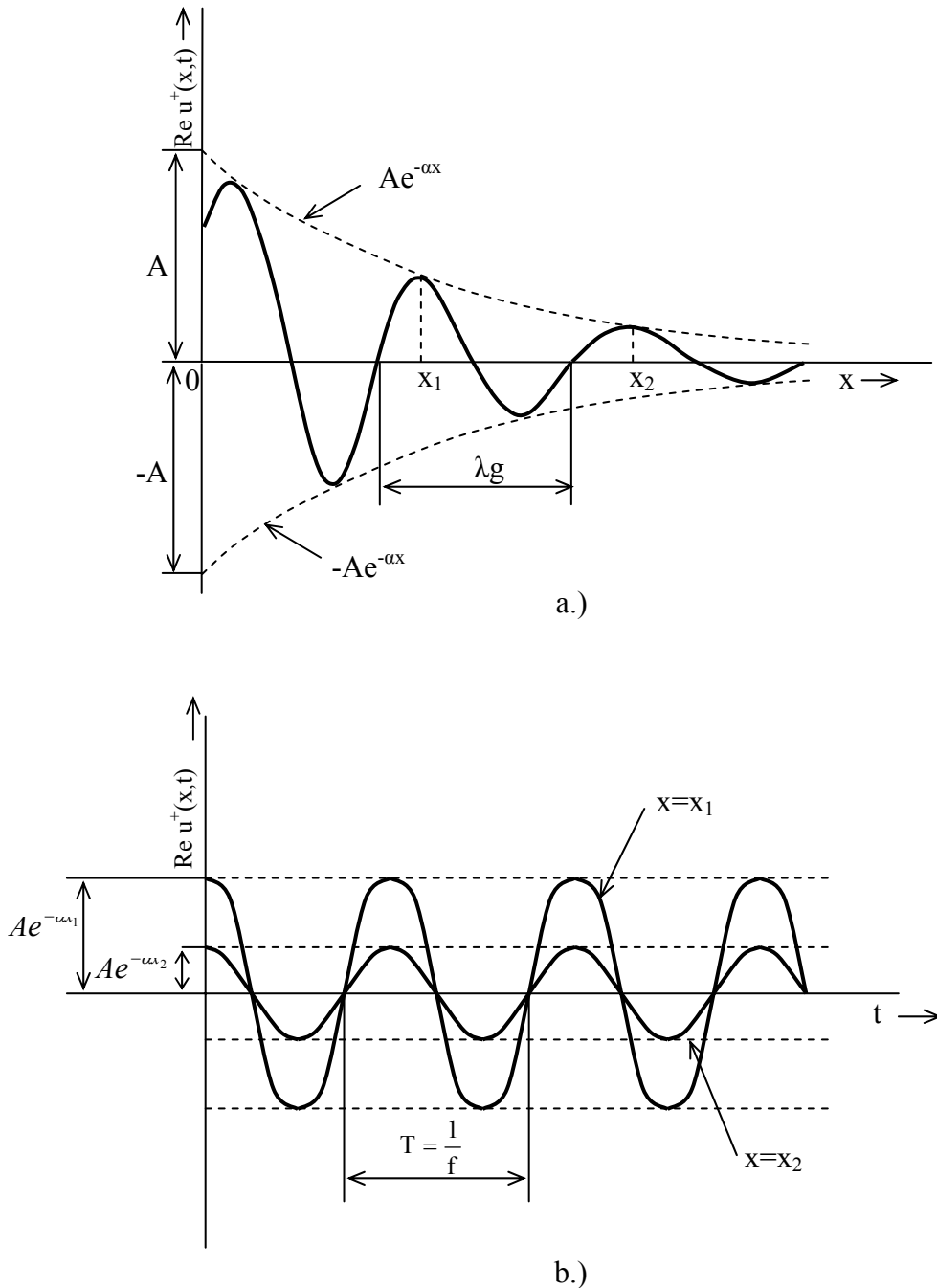
Šírenie signálu pozdĺž vedenia má vlnový charakter, pričom celkové napätie je súčtom priamej napäťovej vlny $u^+(x, t)$ postupujúcej v kladnom smere osi x a spätnej (odrazenej) napäťovej vlny $u^-(x, t)$ šíriacej sa v zápornom

smere osi x . Pomocou vzťahu (2.2.23) môžeme tieto čiastkové vlny zapísať v tvare

$$u^+(x, t) = Ae^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta x)} \quad (2.2.25)$$

$$u^-(x, t) = Be^{\alpha x} e^{j(\omega t + \beta x)} \quad (2.2.26)$$

Z týchto vzťahov vidíme, že integračná konštanta A má fyzikálny význam amplitúdy priamej napät'ovej vlny v počiatku (t.j. v bode $x=0$) a konštanta B je amplitúda spätnej napät'ovej vlny v počiatku.



Obr.2.4

Priebeh priamej napät'ovej vlny pozdĺž vedenia
(a), časový priebeh tej istej vlny v určitých
miestach x_1 a x_2

Šírenie vln na vedení ozrejmjuje obr. 2.4, na ktorom je zobrazený priebeh priamej napät'ovej vlny pozdĺž vedenia v určitom časovom okamžiku $t = \text{konšt}$ (obr. 2.4a) a časový priebeh tej istej vlny v určitých miestach x_1, x_2 na vedení (obr. 2.4b). Priebehy pre spätnú napät'ovú vlnu sú analogické.

Veličina $\phi^+ = \omega t - \beta x$ vo vzťahu (2.2.25) vyjadruje **okamžitú fázu priamej vlny**. Potom pre **fázovú rýchlosť** priamej vlny dostaneme

$$v_{\phi}^+ = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{\phi^+ = \text{konšt}} = \frac{\omega}{\beta} \quad (2.2.27).$$

Za čas jednej periódy $T=1/f$ priama vlna prejde touto rýchlosťou vzdialenosť

$$\lambda_g = v_{\phi}^+ \cdot T = \frac{v_{\phi}^+}{f} \quad (2.2.28)$$

čo je **dĺžka vlny vo vedení**. Dosadením zo vzťahu (2.2.27) dostaneme

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} \quad (2.2.29)$$

Z tohto vzťahu ako aj z obr. 2.4a je zrejme, že dĺžku vlny vo vedení λ_g možno definovať ako vzdialenosť medzi dvoma susednými miestami na vedení, v ktorých sa fáza priamej vlny líši o 2π . **Fázová rýchlosť** v_{ϕ}^+ tiež určuje smer šírenia vlny. Pretože je vždy $\omega > 0$ a podľa vzťahu (2.2.29) je aj $\beta > 0$, je podľa (2.2.27) rýchlosť v_{ϕ}^+ tiež kladná. Kladným časovým prírastkom dt zodpovedajú kladné prírastky vzdialenosti $dx > 0$, teda vlna sa šíri v kladnom smere osi x , preto sa nazýva **priamou vlnou**.

Podobne veličina $\phi^- = \omega t + \beta x$ vo vzťahu (2.2.26) vyjadruje **okamžitú fázu spätnej vlny**. Potom pre **fázovú rýchlosť** spätnej vlny dostaneme

$$v_{\phi}^- = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{\phi^- = \text{konšt}} = -\frac{\omega}{\beta} \quad (2.2.30)$$

Táto rýchlosť je záporná, t.j. spätná vlna sa šíri v zápornom smere osi x .

Pripomeňme, že konštanta šírenia γ závisí od primárnych parametrov vedenia, t.j. závisí od druhu a konštrukcie vedenia (geometrických rozmerov, tvaru a použitých materiálov). To iste platí aj pre fázovú rýchlosť vlny, ktorá sa môže líšiť od rýchlosti šírenia vlny vo voľnom neohraničenom prostredí. Preto môže byť vlnová dĺžka vo vedení λ_g , iná než vlnová dĺžka vo voľnom priestore λ alebo vo vákuu λ_0 (pre vlnenie s danou frekvenciou f). Túto skutočnosť treba rešpektovať a dôsledné rozlišovať jednotlivé vlnové dĺžky λ_0, λ a λ_g .

2.3. VEDENIE AKO DVOJBRÁNA

Integračné konštanty A a B zo všeobecného riešenia (2.2.18) a (2.2.22) telegrafných rovníc možno určiť z okrajových podmienok, t.j. zo známych hodnôt napätia U a prúdu I na počiatku a konci vedenia.

Nech na počiatku vedenia, t.j. pre $x = 0$, je $U = U_1$, a $I = I_1$. Potom dosadením do (2.2.18) a (2.2.22) dostaneme

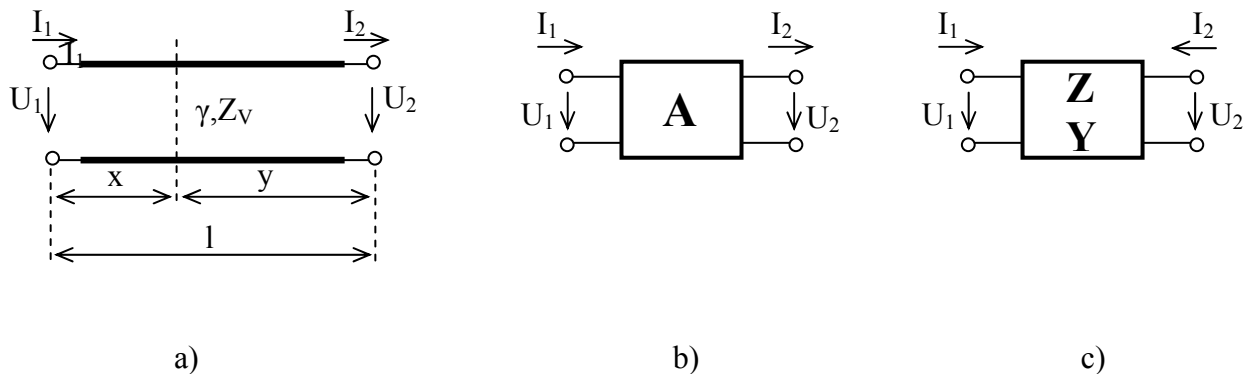
$$A = \frac{U_1 + Z_V I_1}{2} \quad \text{a} \quad B = \frac{U_1 - Z_V I_1}{2} \quad (2.3.1)$$

Keď dosadíme tieto vzťahy do všeobecných vzťahov (2.2.18) a (2.2.22), po úprave dostaneme

$$U(x) = U_1 \cosh \gamma x - Z_V I_1 \sinh \gamma x \quad (2.3.2)$$

$$I(x) = I_1 \cosh \gamma x - \frac{U_1}{Z_V} \sinh \gamma x \quad (2.3.3)$$

kde sme vyjadrili exponenciálne funkcie pomocou hyperbolických funkcií. Vidíme, že napätie a prúd vo vzdialenosti x od počiatku vedenia možno vyjadriť pomocou napätia U_1 a prúdu I_1 na jeho počiatku. Dosadením $x = l$, kde l je celková dĺžka vedenia, možno takto určiť napätie $U(l) = U_2$ a prúd $I(l) = I_2$ na konci vedenia. Celé vedenie potom môžeme považovať za dvojbránu, ktorej je priradená kaskádna matica A (obr. 2.5)



Obr. 2.5

Vedenie ako dvojbrána

$$\begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \gamma l, & -Z_V \sinh \gamma l \\ -Z_V^{-1} \sinh \gamma l, & \cosh \gamma l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} \quad (2.3.4)$$

Integračné konštanty A a B však možno určiť, aj keď poznáme napätie a prúd na konci vedenia, t.j. pre $x=l$ je $U = U_2$ a $I = I_2$. Potom dosadením do (2.2.18) a (2.2.22) dostaneme

$$A = \frac{U_2 + Z_V I_1}{2} e^{\gamma l} \quad \text{a} \quad B = \frac{U_2 - Z_V I_2}{2} e^{-\gamma l} \quad (2.3.5)$$

Keď tieto vzťahy dosadíme do všeobecných vzťahov (2.2.18) a (2.2.22), dostaneme

$$U(x) = \frac{U_2 + Z_V I_2}{2} e^{\gamma(l-x)} + \frac{U_2 - Z_V I_2}{2} e^{-\gamma(l-x)} \quad (2.3.6)$$

$$I(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{U_2}{Z_V} + I_2 \right) e^{\gamma(l-x)} - \frac{1}{2} \left(\frac{U_2}{Z_V} - I_2 \right) e^{-\gamma(l-x)} \quad (2.3.7)$$

Tieto vzťahy možno upraviť na tvar

$$U(y) = U_2 \cosh \gamma y + Z_V I_2 \sinh \gamma y \quad (2.3.8)$$

$$I(y) = I_2 \cosh \gamma y + \frac{U_2}{Z_V} \sinh \gamma y \quad (2.3.9)$$

kde sme zaviedli substitúciu $y=l-x$ (t.j. vzdialenosť sme vyjadrili (obr. 2.5a) od konca vedenia) a exponenciálne funkcie sme vyjadrili pomocou hyperbolických funkcií.

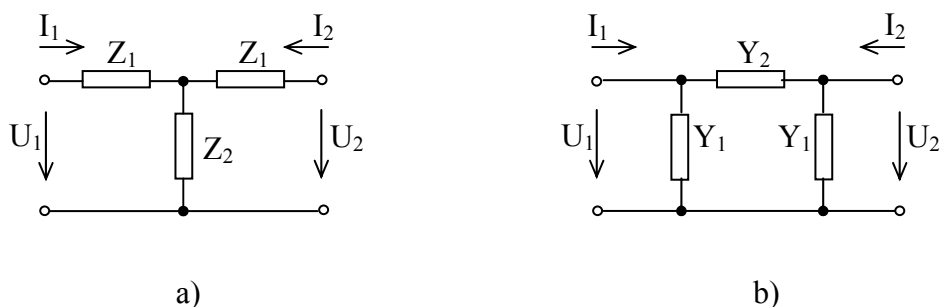
Okrem **kaskádnej matice** A možno vedenie opísať tiež pomocou impedančnej matice Z a admitančnej matice Y . Pre orientáciu napätí a prúdov podľa obr. 2.5c, možno priamo prevodom kaskádnej matice A alebo úpravami vzťahov (2.3.8) a (2.3.9) pre $y=0$ (resp. úpravami vzťahov (2.3.2) a (2.3.3) pre $x=l$) odvodiť **impedančnú maticu vedenia**

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = Z \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = Z_V \begin{bmatrix} \cot gh\gamma l, & (\sinh \gamma l)^{-1} \\ (\sinh \gamma l)^{-1}, & \cot gh\gamma l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (2.3.10)$$

Podobne možno určiť aj **admitančnú maticu vedenia**

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = Y \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{Z_V} \begin{bmatrix} \cot gh\gamma l, & -(\sinh \gamma l)^{-1} \\ -(\sinh \gamma l)^{-1}, & \cot gh\gamma l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (2.3.11)$$

Na základe týchto matic môžeme regulárnemu (homogénemu) vedeniu (ako každej lineárnej dvojbráne) priradiť náhradnú schému, vytvorenú z prvkov so sústredenými parametrami v podobe tzv. **T článku** (obr. 2.6a), alebo tzv. **π článku** (obr. 2.6b).



Obr. 2.6

Náhradná schéma vedenia v tvare tzv. T článku (a) a π článku (b)

Porovnaním impedančnej matice T článku podľa obr. 2.6a a impedančnej matice Z vedenia dostaneme

$$Z_1 = Z_V \frac{\cosh \gamma l - 1}{\sinh \gamma l} \quad \text{a} \quad Z_2 = \frac{Z_V}{\sinh \gamma l} \quad (2.3.12)$$

Podobne porovnaním admitančnej matice π článku podľa obr. 2.6b a admitančnej matice Y vedenia dostaneme

$$Y_1 = Y_V \frac{\cosh \gamma l - 1}{\sinh \gamma l} \quad \text{a} \quad Y_2 = \frac{Y_V}{\sinh \gamma l} \quad (2.3.13)$$

Treba si však uvedomiť, že impedancie Z_1, Z_2 a admitancie Y_1, Y_2 sú vo všeobecnosti zložitými funkciami frekvencie vzhľadom na frekvenčnú závislosť γ aj Z_V (resp. Y_V).

2.4. VEDENIE BEZ STRÁT

Za **vedenie bez strát**, tzv. **bezstratové vedenie**, považujeme vedenie, pre ktoré platí

$$R_1 = G_1 = 0 \quad (2.4.1)$$

Pre rádiové frekvencie je útlm vedení veľmi malý, v praxi možno za bezstratové považovať také vedenie, pre ktoré sú ohmické straty aj straty vplyvom nedokonalosti dielektrika zanedbateľne malé (t.j. platí $R_1 \ll \omega L_1$ a $G_1 \ll \omega C_1$). Pre celý rad vedení možno túto idealizáciu prijať, najmä keď vyšetrovaný úsek vedenia je relatívne krátky.

Pre **vlnovú impedanciu** bezstratového vedenia zo vzťahu (2.2.21) dostaneme

$$Z_V = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \quad (2.4.2)$$

t.j. je reálna a frekvenčne nezávislá. Konštanta šírenia bezstratového vedenia (2.2.23) je rýdzo imaginárna

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{j\omega L_1 j\omega C_1} = j\omega\sqrt{L_1 C_1} = j\beta \quad (2.4.3)$$

z čoho

$$\alpha = 0 \quad \text{a} \quad \beta = \omega\sqrt{L_1 C_1} \quad (2.4.4)$$

Merný útlm bezstratového vedenia je teda rovný nule. Z toho vyplýva, že nedochádza k poklesu amplitúdy napät'ovej vlny pri šírení sa po vedení. Vzhľadom na (2.4.4) je podľa (2.2.27) **fázová rýchlosť** priamej vlny

$$v_\varphi^+ = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \quad (2.4.5)$$

frekvenčne nezávislá, t.j. bezstratové vedenie je nedisperzné. Toto ale znamená, že pre takéto vedenie je $v_\varphi^+ = v_g$, t.j. fázová rýchlosť sa rovná grupovej (skupinovej) rýchlosti. Vzhľadom na to, že medzi v_φ^+ a v_g vo všeobecnosti platí vzťah

$$v_\varphi^+ v_g = \frac{1}{\varepsilon\mu} = v^2 = \frac{c^2}{\varepsilon_r \mu_r} \quad (2.4.6)$$

kde ε a μ sú permitivita a permeabilita bezstratového prostredia, ktorým je vedenie zaplnené (ε_r a μ_r sú relatívna permitivita a permeabilita) $c=3 \cdot 10^8$ m/s je rýchlosť svetla vo vákuu. Potom dostaneme

$$v_\varphi^+ = v_g = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} \quad (2.4.7)$$

t.j. fázová rýchlosť vln na bezstratovom vedení nezávisí od jeho konštrukcie a je pre všetky vedenia s rovnakým dielektrikom rovnaká. Keď je vedenie vyplnené suchým vzduchom (vákuom), potom je $\varepsilon_r = \mu_r = 1$ a $v_\varphi^+ = c$. **Dĺžka vlny λ_g na bezstratovom vedení** je podľa (2.2.28)

$$\lambda_g = \frac{v_\varphi^+}{f} = \frac{c}{f\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} \quad (2.4.8)$$

kde λ je dĺžka vlny v príslušnom dielektriku, ktorým je vyplnené vedenie a $\lambda_0 = c/f$ je dĺžka vlny vo vákuu. Keď je $\lambda_g = \lambda < \lambda_0$, nastáva tzv. **skrátene vlny vplyvom dielektrika**. Vzhľadom na to sa faktor

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} \quad (2.4.9)$$

nazývame **činiteľom skrátenia vlny vo vedení**. Pre suchý vzduch (vákuum) je zrejmé $\lambda_g = \lambda_0$ a činiteľ skrátenia sa rovná jedenej.

Pre bezstratové vedenie majú jednoduchší tvar aj imitačné matice.

Pre $\gamma = j\beta$ platí

$$\begin{aligned} \sinh \gamma x &= \sinh j\beta x = j \sin \beta x & \text{a} \\ \cosh \gamma x &= \cosh j\beta x = \cos \beta x \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

Potom impedančnú Z a admitančnú Y maticu (2.3.10) a (2.3.11) možno písať v tvare

$$Z = -jZ_V \begin{bmatrix} \cot g\beta l, & (\sin \beta l)^{-1} \\ (\sin \beta l)^{-1}, & \cot g\beta l \end{bmatrix}, \quad (2.4.11)$$

$$Y = -\frac{j}{Z_V} \begin{bmatrix} \cot g\beta l & -(\sin \beta l)^{-1} \\ -(\sin \beta l)^{-1} & \cot g\beta l \end{bmatrix}, \quad (2.4.12)$$

kde Z_V a β sú určené vzťahmi (2.4.2) a (2.4.4). Preto sú imitančné matice bezstratového vedenia rýdzo imaginárne.

Pre bezstratové vedenie s TEM vlnou možno vyjadriť primárne parametre L_1 a C_1 vedenia pomocou fázovej rýchlosti v_φ^+ a vlnovej impedancie Z_V . Použitím vzťahov (2.4.2) a (2.4.5) dostaneme

$$L_1 = \frac{Z_V}{v_\varphi^+} \quad \text{a} \quad C_1 = \frac{1}{Z_V v_\varphi^+} \quad (2.4.13)$$

2.5. VEDENIE S MALÝMI STRATAMI

Presnejší stupeň aproximácie reálneho vedenia predstavuje **vedenie s malými stratami**. Tu predpokladáme, že straty sú nenulové, ale sú tak malé, že platí $R_1 < \omega L_1$ a $C < \omega C_1$. Potom **vlnovú impedanciu** možno napísať v tvare

$$Z_V = \sqrt{\frac{R_1 + j\omega L_1}{G_1 + j\omega C_1}} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \sqrt{\frac{1 - jR_1/\omega L_1}{1 - jG_1/\omega C_1}} \cong \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \left[1 - \frac{1}{2\omega} \left(\frac{R_1}{L_1} - \frac{G_1}{C_1} \right) \right] \quad (2.5.1)$$

keď R_1 alebo G_1 je nenulové, Z_V má aj imaginárnu zložku. V špeciálnom prípade, keď platí

$$\frac{R_1}{L_1} = \frac{G_1}{C_1} \quad (2.5.2)$$

bude imaginárna zložka nulová a Z_V bude reálne.

Vzťah (2.2.23) pre **konštantu šírenia** upravme na tvar

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{j\omega L_1 \left(1 + \frac{R_1}{j\omega L_1} \right) j\omega C_1 \left(1 + \frac{G_1}{j\omega C_1} \right)} = \\ &= j\omega \sqrt{L_1 C_1} \left(1 + \frac{R_1}{j\omega L_1} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{G_1}{j\omega C_1} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

Členy v zátvorkách rozviňme do binomického radu, v ktorom zanedbáme členy vyššieho ako druhého rádu. Podľa všeobecného vzťahu

$$(1 + \delta)^{1/2} \cong 1 + \frac{1}{2} \delta - \frac{1}{8} \delta^2 \quad (2.5.4)$$

dostaneme

$$\left(1 + \frac{R_1}{j\omega L_1} \right)^{1/2} \cong 1 + \frac{1}{2} \frac{R_1}{j\omega L_1} + \frac{1}{8} \frac{R_1^2}{\omega^2 L_1^2} \quad (2.5.5)$$

$$\left(1 + \frac{G_1}{j\omega C_1} \right)^{1/2} \cong 1 + \frac{1}{2} \frac{G_1}{j\omega C_1} + \frac{1}{8} \frac{G_1^2}{\omega^2 C_1^2} \quad (2.5.6)$$

Potom konštantu šírenia možno napísať v tvare

$$\begin{aligned} \gamma &= \alpha + j\beta \cong j\omega \sqrt{L_1 C_1} \left[1 + \frac{1}{8\omega^2} \left(\frac{R_1}{L_1} - \frac{G_1}{C_1} \right)^2 + \frac{1}{j2\omega} \left(\frac{R_1}{L_1} + \frac{G_1}{C_1} \right) \right] = \\ &= \frac{R_1}{2} \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} + \frac{G_1}{2} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} + j\omega \sqrt{L_1 C_1} \left[1 + \frac{1}{8\omega^2} \left(\frac{R_1}{L_1} - \frac{G_1}{C_1} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

Porovnaním reálnych častí pravej a ľavej strany tohto výrazu dostaneme

$$\alpha \cong \frac{R_1}{2} \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} + \frac{G_1}{2} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \quad (2.5.8)$$

Keď uvažujeme vedenie s malými stratami, je jeho **vlnová impedancia** Z_V (2.5.1) temer reálna a jej veľkosť sa rovná vlnovej impedancii bezstratového vedenia (2.4.2). Pomocou tohto výsledku možno vzťah (2.5.8) napísať v tvare

$$\alpha \cong \frac{R_1}{2Z_V} + \frac{G_1}{2Y_V} = \alpha_r + \alpha_d \quad (2.5.9)$$

kde α_r určuje **špecifický útlm vplyvom strát vo vodičoch** vedenia a α_d **určuje špecifický útlm vplyvom nedokonalosti použitého dielektrika**. Pre uzavreté vedenia je α_d určené len dielektrickými stratami, ale pre otvorené vedenia musíme uvažovať aj straty v okolitom prostredí (napríklad pre voľné vzduchové vedenia; najmä za mokrého počasia je nutné uvažovať aj zvody použitých nosných izolátorov).

Dielektrický útlm α_d možno približne vyjadriť pomocou stratového uhlu δ použitého dielektrika. Vzhľadom na všeobecne platný vzťah

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \Rightarrow \operatorname{tg} \delta = \frac{G_1}{\omega C_1} \quad (2.5.10)$$

možno α_d napísať v tvare

$$\alpha_d \cong \frac{G_1}{2Y_V} = \frac{\omega C_1 \operatorname{tg} \delta}{2} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} = \frac{\omega \sqrt{L_1 C_1}}{2} \operatorname{tg} \delta \quad (2.5.11)$$

Tento vzťah možno použitím vzťahu (2.4.4). (2.2.28) a (2.4.8) upraviť na tvar

$$\alpha = \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \delta = \frac{\pi}{\lambda} \operatorname{tg} \delta = \frac{\pi \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}{\lambda_0} \operatorname{tg} \delta \quad (2.5.12)$$

Porovnaním imaginárnych častí pravej a ľavej strany výrazu (2.5.7) dostaneme

$$\beta \cong \omega \sqrt{L_1 C_1} \left[1 + \frac{1}{8\omega^2} \left(\frac{R_1}{L_1} - \frac{G_1}{C_1} \right)^2 \right] \quad (2.5.13)$$

Pre **fázovú rýchlosť** priamej vlny potom podľa vzťahu (2.2.27) dostaneme

$$v_{\varphi}^{+} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1} \left[1 + \frac{1}{8\omega^2} \left(\frac{R_1}{L_1} - \frac{G_1}{C_1} \right)^2 \right]} \cong \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \left[1 - \frac{1}{8\omega^2} \left(\frac{R_1}{L_1} - \frac{G_1}{C_1} \right)^2 \right] \quad (2.5.14)$$

Z tohto vzťahu vyplýva, že fázová rýchlosť na vedení so stratami je menšia ako fázová rýchlosť na bezstratovom vedení. Preto podľa vzťahu (2.2.28) je menšia aj dĺžka vlny λ_g na vedení. Teda s rastúcimi stratami klesá fázová rýchlosť vlny a skraca sa jej dĺžka na vedení.

Vedenie so stratami je disperzné, pretože v_{φ}^{+} , (vzťah (2.5.14)) závisí od frekvencie. V špeciálnom prípade, keď platí vzťah (2.5.2), nedochádza na vedení s malými stratami k zmenšeniu fázovej rýchlosti ani vlnovej dĺžky a vedenie je nedisperzné.

2.6. VSTUPNÁ IMPEDANCIA VEDENIA

Uvažujme vedenie s vlnovou impedanciou Z_V a dĺžkou l , ktoré je zakončené komplexnou zakončovacou impedanciou Z_2 . Použitím vzťahov (2.3.8) a (2.3.9) môžeme vyjadriť napätie a prúd na vstupe (počiatku) vedenia U_1, I_1 pomocou napätia a prúdu na konci vedenia U_2, I_2 v tvare

$$U_1 = U_2 \cosh \gamma l + Z_V I_2 \sinh \gamma l \quad (2.6.1)$$

$$I_1 = I_2 \cosh \gamma l + \frac{U_2}{Z_V} \sinh \gamma l \quad (2.6.2)$$

Vstupnú impedanciu vedenia definujeme vzťahom

$$Z_{vst} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2 + Z_V I_2 \operatorname{tgh} \gamma l}{I_2 + \frac{U_2}{Z_V} \operatorname{tgh} \gamma l} \quad (2.6.3)$$

Keď si uvedomíme, že platí

$$U_2 = Z_2 I_2 \quad (2.6.4)$$

potom pre vstupnú impedanciu dĺžky dostaneme dôležitý vzťah

$$Z_{vst} = Z_V \frac{Z_2 + Z_V \operatorname{tgh} \gamma l}{Z_V + Z_2 \operatorname{tgh} \gamma l} \quad (2.6.5)$$

Pre bezstratové vedenie, použitím vzťahu

$$\operatorname{tgh} \gamma l = \operatorname{tgh} \beta l = j \operatorname{tg} \beta l \quad (2.6.6)$$

pre vstupnú **impedanciu vedenia** dostaneme

$$Z_{VST} = Z_V \frac{Z_2 + jZ_V \operatorname{tg} \beta l}{Z_V + jZ_2 \operatorname{tg} \beta l} \quad (2.6.7)$$

Okrem výpočtu vstupnej impedancie umožňuje vzťah (2.6.5) tiež definovať **vlnovú impedanciu** Z_V , matematicky určená vzťahom (2.2.21). Je možné použiť tri definície:

- 1) Vlnová impedancia Z_V je vstupná impedancia nekonečne dlhého vedenia. Pre $l \rightarrow \infty$ je $\operatorname{tgh} \gamma l \rightarrow 1$ a z (2.6.5) dostaneme $Z_{VST} = Z_V$.
- 2) Vlnovú impedanciu vedenia je možné definovať tiež ako vstupnú impedanciu odrazovo prispôbeného vedenia, t.j. vedenie zakončené impedanciou $Z_2 = Z_V$. Priamym dosadením do vzťahu (2.6.5) dostaneme, že v tomto prípade $Z_{VST} = Z_V$.
- 3) Vlnová impedancia sa rovná podielu fázorov priamej napät'ovej vlny U^+ a priamej prúdovej vlny I^+ . Tieto fázory možno určiť zo vzťahov (2.3.6) a (2.3.7). Potom dostaneme

$$U^+ = \frac{U_2 + Z_V I_2}{2} e^{\gamma(l-x)} \quad (2.6.8)$$

$$I^+ = \frac{1}{2} \left(\frac{U_2}{Z_V} + I_2 \right) e^{\gamma(l-x)} \quad (2.6.9)$$

Z čoho dostaneme

$$Z_V = \frac{U^+}{I^+} \quad (2.6.10)$$

Podobne môžeme Z_V definovať aj ako záporne vzatý podiel fázorov spätnej napät'ovej vlny U^- a spätnej prúdovej vlny I^- . Keď tieto fázory určíme zo vzťahov (2.3.6) a (2.3.7), ľahko sa presvedčíme, že platí

$$Z_V = -\frac{U^-}{I^-} \quad (2.6.11)$$

Vypočítajme vstupnú impedanciu pre vedenie dĺžky $l = n \lambda_g / 2$, kde $n = 1, 2, \dots$ je celé číslo a vedenie je zakončené ľubovoľnou impedanciou Z_2 . Vzhľadom na to platí

$$l = n \lambda_g / 2 \Rightarrow \beta l = n \pi \Rightarrow \operatorname{tg} \beta = 0 \quad (2.6.12)$$

potom dosadením do (2.6.7) dostaneme

$$Z_{VST} = Z_2 \quad (2.6.13)$$

t.j. vstupná impedancia sa rovná zaťažovacej impedancii a nezávisí od vlnovej impedancie vedenia.

Vypočítajme vstupnú impedanciu vedenia dĺžky $l = \lambda_g/4 + n \lambda_g/2$, kde $n = 1, 2, \dots$ je celé číslo a vedenie je zakončené impedanciou Z_2 . Vzhľadom na to, že platí

$$l = \lambda_g / 4 + n \lambda_g / 2 \Rightarrow \beta l = \pi / 2 + n \pi \Rightarrow \operatorname{tg} \beta l = \infty \quad (2.6.14)$$

potom zo vzťahu (2.6.7) dostaneme

$$Z_{VST} = \frac{Z_V^2}{Z_2}. \quad (2.6.15)$$

čo možno napísať v tvare

$$Z_V = \sqrt{Z_{VST} Z_2} \quad (2.6.16)$$

Teda **štvrt'vlnové vedenie** pôsobí ako **impedančný transformátor**, ktorý transformuje zakončovaciu impedanciu Z_2 na impedanciu Z_{VST} takým spôsobom, že ich geometrický priemer (vzťah (2.6.16)) sa rovná vlnovej impedancii vedenia Z_V . Keď je zakončovacia impedancia Z_2 reálna, potom vzhľadom na to, že Z_2 je pre bezstratové vedenie tiež reálna, je reálna aj vstupná impedancia Z_{VST} .

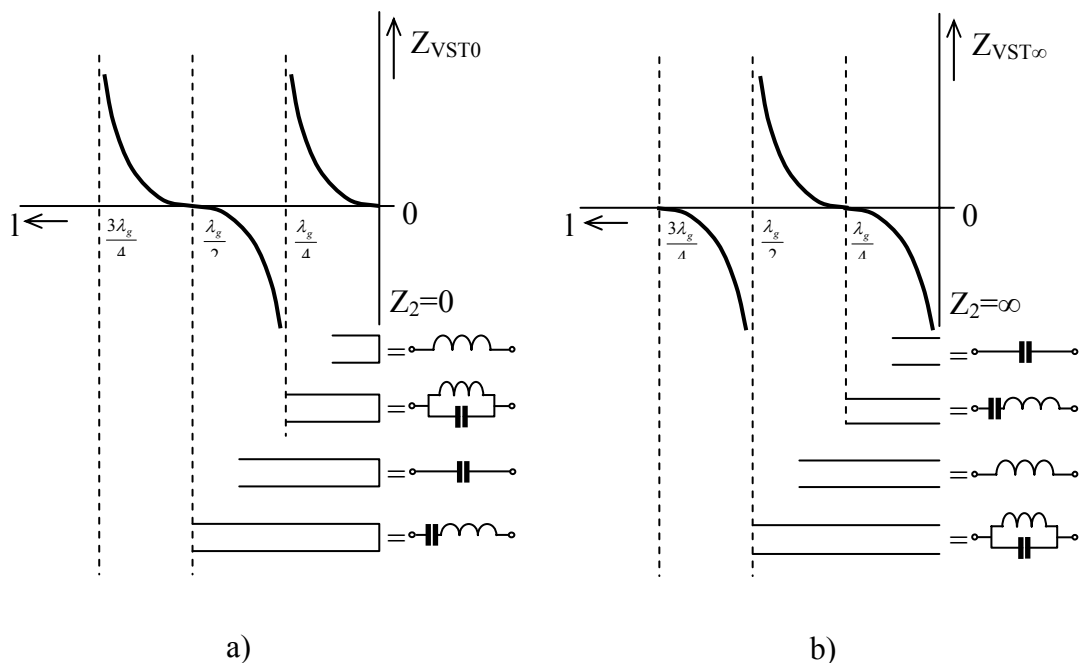
Podobným spôsobom ako sme definovali vstupnú impedanciu, možno definovať aj **vstupnú admitanciu vedenia**

$$Y_{VST} = \frac{1}{Z_{VST}} = Y_V \frac{Z_V + Z_2 \operatorname{tgh} \gamma l}{Z_2 + Z_V \operatorname{tgh} \gamma l} = Y_V \frac{Y_2 + Y_V \operatorname{tgh} \gamma l}{Y_V + Y_2 \operatorname{tgh} \gamma l} \quad (2.6.17)$$

Pre bezstratové vedenie

$$Y_{VST} = Y_V \frac{Y_2 + j Y_V \operatorname{tg} \beta l}{Y_V + j Y_2 \operatorname{tg} \beta l} \quad (2.6.18)$$

Na **konci skratované resp. otvorené vedenie** s malými stratami sa často používa na vytvorenie reaktancii resp. susceptancii (obr. 2.7).



Obr.2.7

Vstupná impedancia skratovaného (a)
a otvoreného (b) vedenia

Pre **skratované vedenie** (vedenie nakrátko) dostaneme vstupnú impedanciu zo vzťahu (2.6.7) dosadením $Z_2 = 0$.

$$Z_{VST0} = jZ_V \operatorname{tg} \beta l \quad (2.6.19)$$

Jej reciproká hodnota je vstupná admitancia vedenia nakrátko

$$Y_{VST0} = -jY_V \cot \beta l \quad (2.6.20)$$

Zo vzťahov (2.6.19) a (2.6.20) je zrejmé, že pomocou úseku vedenia nakrátko možno realizovať ľubovoľnú reaktanciu $Z_{VST0} = jX$, alebo admitanciu $Y_{VST0} = jB$ v medziach od $-\infty$ do $+\infty$ (obr. 2.7a)

Pre **otvorené vedenie** (vedenie naprázdno) dostaneme dosadením $Z_2 = \infty$ zo vzťahu (2.6.7) vstupnú impedanciu

$$Z_{VST\infty} = -jZ_V \cot \beta l \quad (2.6.21)$$

Jej reciproká hodnota je vstupná admitancia vedenia naprázdno

$$Y_{VST\infty} = jY_V \operatorname{tg} \beta l \quad (2.6.22)$$

Podobne pomocou úseku otvoreného vedenia možno realizovať ľubovoľnú reaktanciu alebo admitanciu v medziach od $-\infty$ až do $+\infty$. Pripomeňme však, že transformačné vlastnosti vedení naprázdno, t.j. na konci otvorených vedení sa pre praktické účely temer nepoužívajú vzhľadom na to, že otvorený koniec vedenia môže vyžarovať. Vzhľadom na to je najvýhodnejšie využiť transformačné vlastnosti úsekov skratovaného vedenia, ktoré sa skutočne chová ako „etalón reaktancie“, preto ho možno použiť na prispôsobovanie, vytváranie rezonančných obvodov a pod.

2.7. KOEFICIENT ODRAZU

Koeficient (činiteľ) odrazu určuje pomer priamej (postupujúcej) a spätnej (odrazenej) vlny na vedení, pričom spätná vlna vzniká odrazom priamej (postupujúcej) vlny od impedancie Z_2 na konci vedenia. Vzhľadom na to, že na vedení existuje napät'ová a prúdová vlna, možno definovať napät'ový a prúdový koeficient odrazu.

Napät'ový koeficient odrazu v určitom mieste vedenia je definovaný ako podiel fázorov spätnej (odrazenej) napät'ovej vlny a priamej napät'ovej vlny v tomto mieste

$$\rho_U = \frac{U^-}{U^+} \quad (2.7.1)$$

Podobne možno definovať aj **prúdový koeficient odrazu**

$$\rho_I = \frac{I^-}{I^+} \quad (2.7.2)$$

Použitím vzťahov (2.6.10) a (2.6.11) možno jednoducho ukázať, že platí

$$\rho_U = -\rho_I \quad (2.7.3)$$

t.j. že obidva koeficienty odrazu majú rovnakú veľkosť a ich argumenty sa líšia o 180° . Keď poznáme jeden koeficient odrazu, potom možno podľa vzťahu (2.7.3) ľahko určiť aj druhý. Preto sa ďalej budeme zaoberať len napät'ovým koeficientom odrazu ρ_U a z dôvodov jednoduchšieho zápisu budeme pri jeho určovaní vynechávať index U.

Hodnota činiteľa odrazu sa mení pozdĺž vedenia. Keď podľa vzťahu (2.3.6) určíme veličiny U^+ a U^- vo všeobecnom mieste $y = l-x$ od konca vedenia, potom pre koeficient odrazu vo vzdialenosti y od záťaže Z_2 dostaneme vzťah

$$\rho(y) = \frac{U^-(y)}{U^+(y)} = \frac{Z_2 - Z_V}{Z_2 + Z_V} e^{-2\gamma y} \quad (2.7.4)$$

Vyšetríme špeciálne prípady tohto vzťahu:

a) Činiteľ odrazu na konci vedenia

$$\rho_2 = \rho(y=0) = \frac{Z_2 - Z_V}{Z_2 + Z_V} \quad (2.7.5)$$

je úplne určený zaťažovacou impedanciou Z_2 a vlnovou impedanciou Z_V . Pre reálnu vlnovú impedanciu Z_V (napr. pre bezstratové vedenie) a pre pasívnu záťaž, t.j. $\text{Re}(Z_2) \geq 0$, platí $|\rho_2| \leq 1$, t.j. veľkosť činiteľa odrazu je menšia ako jedna.

b) Činiteľ odrazu na začiatku vedenia

$$\rho_1 = \rho(y=1) = \frac{Z_2 - Z_V}{Z_2 + Z_V} e^{-2\gamma l} = \rho_2 e^{-2\gamma l} \quad (2.7.6)$$

kde sme použili vzťah (2.7.5).

Pomocou (2.7.5) možno vzťah (2.7.4) napísať v tvare

$$\rho(y) = \rho_2 e^{-2\gamma y} \quad (2.7.7)$$

Pomocou koeficientu odrazu možno odvodiť niektoré dôležité závery. Keď je $\rho = 0$, potom na vedení nie je spätná (odrazená) vlna. Koeficient odrazu je nulový, keď $Z_2 = Z_V$, t.j. vedenie je zakončené svojou vlnovou impedanciou. Hovoríme, že záťaž je prispôbená vedeniu.

Pretože $\gamma = \alpha + j\beta$, je zrejmé, že veľkosť činiteľa odrazu na vedení so stratami klesá exponenciálne s rastúcou vzdialenosťou y od konca vedenia

$$|\rho(y)| = |\rho_2| e^{-2\alpha y} \quad (2.7.8)$$

Na bezstratovom vedení ($\alpha = 0$) je koeficient odrazu

$$\rho(y) = \rho_2 e^{-2j\beta y} \quad (2.7.9)$$

t.j. veľkosť koeficientu odrazu sa pozdĺž vedenia nemení, mení sa len jeho argument (fáza). Vlnová impedancia je v tomto prípade reálna a pre prispôbenie musí opäť platiť $Z_2 = Z_V$, t.j. záťaž musí byť tvorená len reálnym odporom.

Keď nie je splnená podmienka $Z_2 = Z_V$, na vedení vzniká odrazená (spätná) vlna, ktorá sa skladá s priamou vlnou a výsledkom tejto superpozície je vznik **stojatého vlnenia**.

2.8. STOJATÉ VLNENIA

Výsledné napätie na vedení je určené podľa vzťahu (2.2.24) súčtom napätia priamej a odrazenej vlny. Superpozíciou týchto vln vznikajú na vedení tzv. **stojaté vlny** (stojaté vlnenie). V ďalšom rozbere budeme pre jednoduchosť uvažovať len bezstratové vedenie. Fázor napätia na vedení možno podľa vzťahu (2.2.18) pre bezstratové vedenie napísať v tvare

$$U(x) = Ae^{-j\beta x} + Be^{j\beta x} = U_1^+ e^{-j\beta x} + U_1^- e^{j\beta x} \quad (2.8.1)$$

kde sme konštanty A a B nahradili podľa ich významu symbolmi U_1^+ a U_1^- , teda fázormi priamej a odrazenej napät'ovej vlny na počiatku vedenia (pre $x = 0$). Pomocou vzťahu (2.7.7) môžeme napísať

$$U_1^- = U_1^+ \rho_1 = U_1^+ \rho_2 e^{-j2\beta l} = U_1^+ |\rho_2| \exp\{j(\varphi_2 - 2\beta l)\} \quad (2.8.2)$$

kde φ_2 je fáza koeficientu odrazu ρ_2 . Dosadením tohto výrazu do vzťahu (2.8.1) dostaneme

$$\begin{aligned} U(x) &= U_1^+ \left[\exp\{-j\beta x\} + |\rho_2| \exp\{j(\varphi_2 + \beta x - 2\beta l)\} \right] = \\ &= U_1^+ \left[\exp\left\{-j\left(\beta x - \beta l + \frac{\varphi_2}{2}\right)\right\} + |\rho_2| \exp\left\{j\left(\beta x - \beta l + \frac{\varphi_2}{2}\right)\right\} \right] \cdot \\ &\quad \cdot \exp\left\{j\left(\frac{\varphi_2}{2} - \beta l\right)\right\} \end{aligned} \quad (2.8.3)$$

Označme $\varphi = \beta(x - l) + \frac{\varphi_2}{2} = \frac{\varphi_2}{2} - \beta y$, kde $y = l - x$ je vzdialenosť od konca vedenia.

Vyjadrením exponenciálnych funkcií v goniometrickom tvare dostaneme po úprave (2.8.3) vzťah

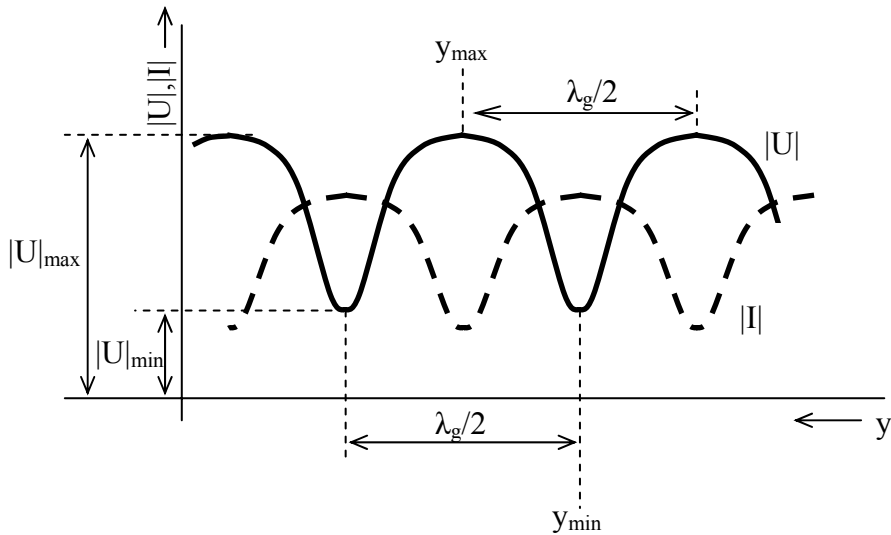
$$U(x) = U_1^+ \left[(1 + |\rho_2|) \cos \psi - j(1 - |\rho_2|) \sin \psi \right] \exp\left\{j\left(\frac{\varphi_2}{2} - \beta l\right)\right\} \quad (2.8.4)$$

Z tohto vzťahu je zrejmé, že veľkosť fázora amplitúdy výsledného napät'ového priebehu na vedení, t.j. **veľkosť stojatých vln** sa mení pozdĺž vedenia, pretože platí

$$\begin{aligned} |U(x)| &= |U_1^+| \sqrt{(1 + |\rho_2|)^2 \cos^2 \psi + (1 - |\rho_2|)^2 \sin^2 \psi} = \\ &= |U_1^+| \sqrt{1 + |\rho_2|^2 + 2|\rho_2| \cos(2\beta y - \varphi_2)} \end{aligned} \quad (2.8.5)$$

Z tohto vzťahu vyplýva, že stojaté vlny sú priestorovo stacionárnym útvarom (obr. 2.8.), ktorého amplitúda dosahuje v určitých miestach na vedení svoju maximálnu hodnotu (nazývame ich maximami stojatých vln alebo **kmitňami**) a v iných miestach dosahuje trvalo svoju minimálnu hodnotu (minimá stojatých vln alebo **uzly**). Poloha týchto maxím a miním sa s časom nemení a je určená len frekvenciou signálu a zaťažovacou impedanciou vedenia (t.j. Z_2). Podľa vzťahu (2.8.5) vznikajú maximá napät'ových stojatých vln v miestach, kde

$$2\beta y - \varphi_2 = 2(n - 1)\pi, \quad \text{kde } n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.8.6)$$



Obr. 2.8
Stojaté vlny na vedení bez strát

teda poloha n -tého maxima na vedení (počítaná od jeho konca) je

$$y_{\max}^{(n)} = \frac{(n-1)\pi}{\beta} + \frac{\varphi_2}{2\beta} = (n-1)\frac{\lambda_g}{2} + \frac{\varphi_2}{2\beta} \quad (2.8.7)$$

kde sme pri úprave použili vzťah (2.2.29). Vzďialenosť dvoch susedných maxim napät'ových stojatých vln sa rovná

$$\Delta y_{\max} = y_{\max}^{(n+1)} - y_{\max}^{(n)} = \frac{\lambda_g}{2} \quad (2.8.8)$$

t.j polovici vlnovej dĺžky na vedení. Minimá napät'ových stojatých vln vznikajú v miestach, kde

$$2\beta y - \varphi_2 = (2n-1)\pi, \quad \text{kde } n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.8.9)$$

teda poloha n -tého minima od konca vedenia je

$$y_{\min}^{(n)} = \frac{2n-1}{2\beta}\pi + \frac{\varphi_2}{2\beta} = \frac{2n-1}{2}\frac{\lambda_g}{2} + \frac{\lambda_g}{2\beta} \quad (2.8.10.)$$

kde sme pri úprave použili vzťah (2.2.29). Vzďialenosť dvoch susedných minim napät'ových stojatých vln sa rovná

$$\Delta y_{\min} = y_{\min}^{(n+1)} - y_{\min}^{(n)} = \frac{\lambda_g}{2} \quad (2.8.11)$$

Pre vzdialenosť minima a susedného maxima napät'ových stojatých vln platí

$$y_{\min}^{(n)} - y_{\max}^{(n)} = \left(\frac{2n+1}{2} - n+1 \right) \frac{\lambda_g}{2} = \frac{\lambda_g}{4} \quad (2.8.12)$$

Pripomeňme si, že podľa vzťahu (2.8.5) a obr. 2.8 nie je priebeh amplitúdy napät'ových stojatých vln harmonický (t.j. priebeh nezodpovedá čistej sínusovke ani kosínusovke). Treba tiež pripomenúť, že obr. 2.8 a vzťah (2.8.5) vyjadruje len priebeh amplitúdy napät'ových stojatých vln na vedení. Tento priebeh možno merať napr. efektívnym (špičkovým) v'oltmetrom tak, že jeho vstupnú sondu budeme posunovať pozdĺž daného vedenia. Stojaté vlny sú stacionárnym útvarom len z priestorového hľadiska, časove sú harmonicky premenné. Znamená to, že v každom mieste vedenia sa okamžitá hodnota stojatej napät'ovej vlny harmonicky mení s časom. Amplitúda týchto harmonických kmitov (obr. 2.8) je však v rôznych miestach na vedení rôzna, v maximách stojatých vln najväčšia a v minimách najmenšia.

Okrem napät'ových stojatých vln vznikajú v každom mieste vedenia (obr. 2.8) aj prúdové stojaté vlny. Pre tieto stojaté vlny možno vykonať podobný rozbor ako pre napät'ové stojaté vlny. Keď vyjdeme zo vzťahu (2.2.22), možno ukázať, že fázor prúdových stojatých vln na bezstratovom vedení je určený vzťahom

$$I(x) = I_1^+ \left[(1 - |\rho_2|) \cos \psi - j(1 + |\rho_2|) \sin \psi \right] \exp \left\{ j \left(\frac{\varphi_2}{2} - \beta l \right) \right\} \quad (2.8.13)$$

z ktorého po úpravách dostaneme priebeh amplitúdy prúdových stojatých vln

$$|I(x)| = |I_1^+| \sqrt{1 + |\rho_2|^2 - 2|\rho_2| \cos(2\beta y - \varphi_2)} \quad (2.8.14)$$

Z tohto vzťahu vyplýva, že prúdové stojaté vlny majú analogický priebeh ako napät'ové stojaté vlny a sú voči nim priestorovo posunuté o $\lambda_g/4$ ako je to naznačené na obr. 2.8. V miestach maxim napät'ových stojatých vln sú minimá prúdových stojatých vln a naopak.

Zo vzťahu (2.8.5) vyplýva, že amplitúdu stojatých vln možno úplne charakterizovať koeficientom odrazu ρ_2 . Inou vhodnou veličinou, ktorou je možné opísať stojaté vlny na vedení, je tzv. **pomer stojatých vln (PSV)** definovaný podielom maximálnej a minimálnej amplitúdy stojatých vln.

$$PSV = r = \frac{|U|_{\max}}{|U|_{\min}} \quad (2.8.15)$$

Vzhľadom na definíciu PSV môže veličina r nadobúdať hodnoty z intervalu $r \in \langle 1, \infty \rangle$. Medzi činiteľom odrazu ρ a PSV existuje jednoznačný vzťah. Tento vzťah nájdeme takto: Maximá napät'ových stojatých vln sú zrejme v tých miestach na vedení, kde sa priama a odrazená napät'ová vlna stretávajú vo fáze a ich amplitúdy sa sčítajú, teda $|U|_{\max} = |U^+| + |U^-|$.

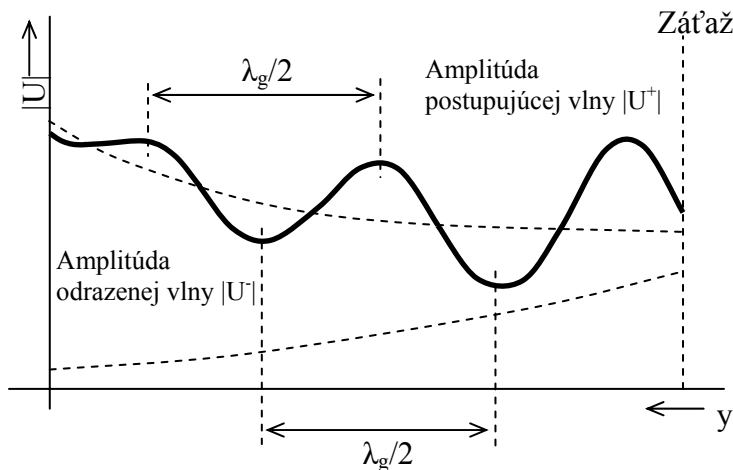
Naopak v miestach minima stojatých vln sa obe vlny stretávajú v protifáze a ich amplitúdy sa odčítavajú, teda $|U|_{\min} = |U^+| - |U^-|$. Dosadením do vzťahu (2.8.15) dostaneme

$$r = \frac{|U^+| + |U^-|}{|U^+| - |U^-|} = \frac{1 + \frac{|U^-|}{|U^+|}}{1 - \frac{|U^-|}{|U^+|}} = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} \quad (2.8.16)$$

kde sme pri úprave použili vzťah (2.7.1). Zo vzťahu (2.8.16) možno vypočítať veľkosť koeficienta odrazu

$$|\rho| = \frac{r - 1}{r + 1} \quad (2.8.17)$$

Pripomeňme, že veličiny $|\rho|$ aj r sa určujú v tom istom mieste na vedení. Na bezstratovom vedení je $|\rho|$ konštantné pozdĺž celého vedenia, preto aj PSV je konštantný a možno ho určovať v ľubovoľnom mieste vedenia.



Obr. 2.9

Stojaté vlny na vedení so stratami

Pre vedenie so stratami sa však $|\rho|$ a teda aj r pozdĺž vedenia mení. Podľa vzťahu (2.7.8) $|\rho|$ a teda aj r klesá smerom k vstupu vedenia so stratami. Priebeh amplitúdy stojatých vln na vedení so stratami má tvar podľa obr. 2.9. V tomto prípade je potrebné rozlišovať PSV na konci a na počiatku vedenia, prípadne aj v iných miestach na vedení. Keď je však útlm vedenia veľký ($\alpha \rightarrow \infty$), prípadne vedenie dostatočne dlhé ($l \rightarrow \infty$, $\alpha \neq 0$) potom, ako to

vyplýva zo vzťahu (2.7.6), je $|\rho_1| \rightarrow 0$ pre ľubovoľnú hodnotu $|\rho_2|$. Takéto vedenie je teda na svojom vstupe temer prispôsobené pre akúkoľvek zaťažovaciu impedanciu. Vplyvom veľkého útlmu je amplitúda odrazenej vlny na vstupe vedenia veľmi malá, takže tu prakticky existuje len priama vlna.

Koeficient odrazu ρ a PSV súvisí aj s výkonovými pomermi na vedení. Výkon je úmerný štvorcu amplitúdy, teda platí

$$\frac{P_r}{P_p} = \frac{|U^-|^2}{|U^+|^2} \quad (2.8.18)$$

kde P_r je výkon odrazenej a P_p je výkon postupujúcej vlny. Pretože $U/U^+ = \rho$, platí

$$\frac{P_r}{P_p} = |\rho|^2 = \rho\rho^* \quad (2.8.19)$$

čo možno pomocou (2.8.17) napísať v tvare

$$\frac{P_r}{P_p} = \left(\frac{r-1}{r+1}\right)^2 \quad (2.8.20)$$

Keď označíme P_t výkon prenesený do záťaže

$$P_t = P_p - P_r \quad (2.8.21)$$

potom platí

$$\frac{P_t}{P_p} = 1 - |\rho|^2 = \frac{4r}{(r+1)^2} \quad (2.8.22)$$

Vyjadríme odrazený výkon P_r a prenášaný výkon P_t do záťaže v percentách

$$P_r(\%) = \left(\frac{r-1}{r+1}\right)^2 \cdot 100\% \quad (2.8.23)$$

$$P_t(\%) = \frac{4r}{(r+1)^2} \cdot 100\% \quad (2.8.24)$$

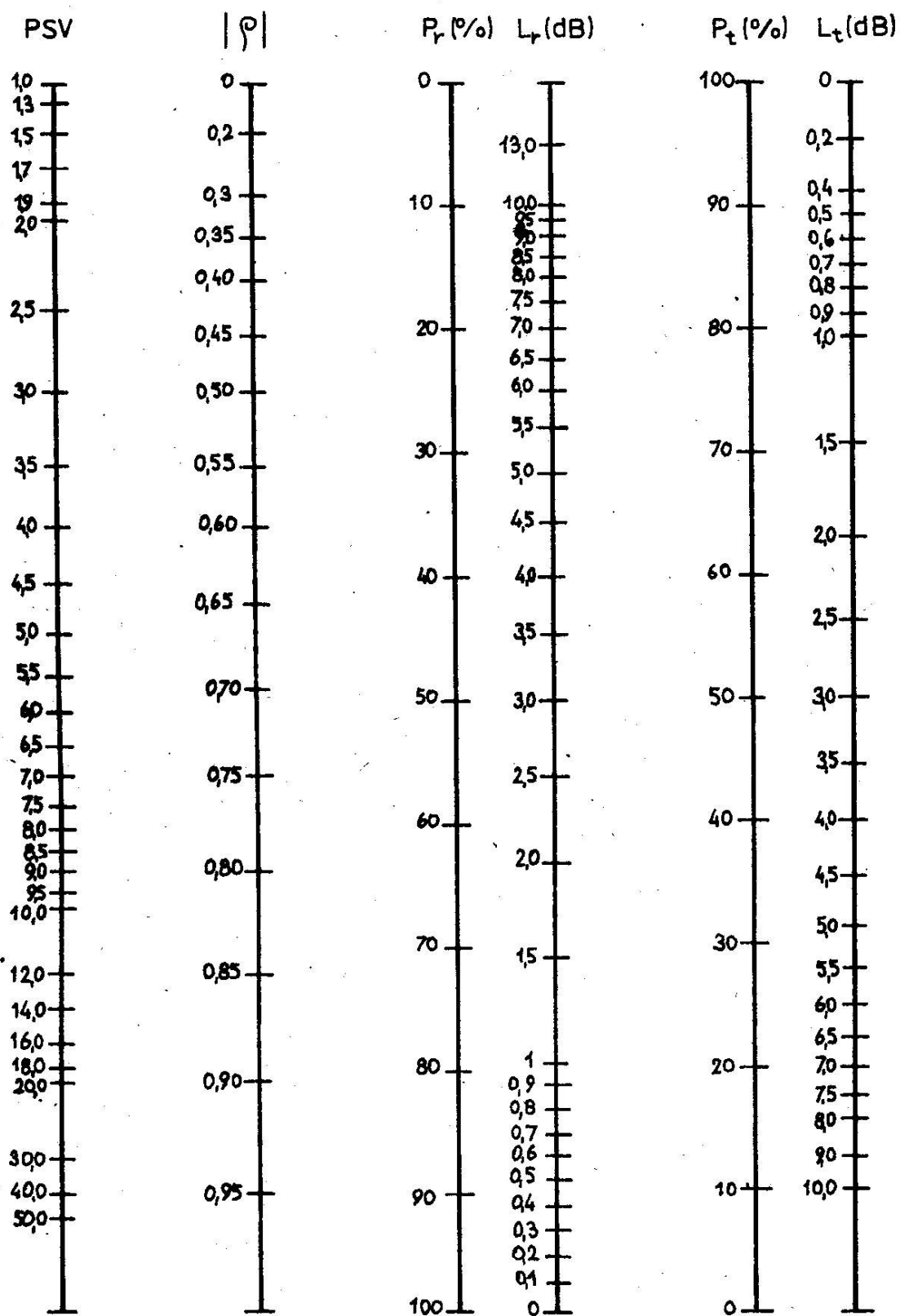
Prenosové straty v dB, ktoré vznikajú neprispôsobením, možno určiť zo vzťahu

$$L_t(\text{dB}) = 10 \log \frac{P_p}{P_t} = 10 \log \left(\frac{1}{1 - |\rho|^2} \right) \quad (2.8.25)$$

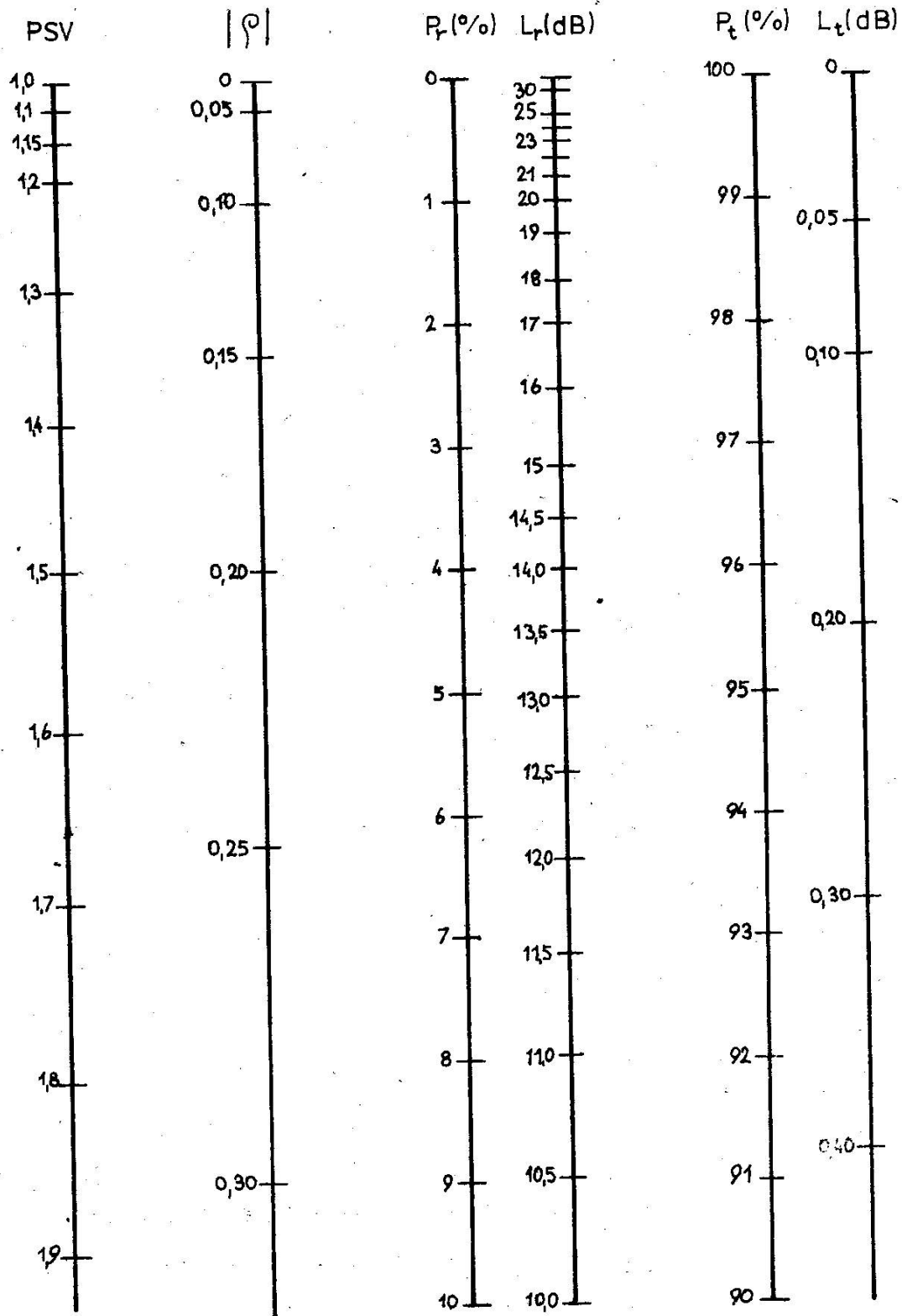
Odstup výkonu priamej vlny od výkonu odrazenej (spätnej) vlny (tzv. **spätne straty**) je

$$L_r(\text{dB}) = 10 \log \frac{P_p}{P_r} = 10 \log \frac{1}{|\rho|^2} \quad (2.8.26)$$

Pre praktické výpočty je vhodné závislosti (2.8.23) až (2.8.26) vyniesť graficky v tvare tzv. nomogramov PSV, ktoré sú uvedené na obr. 2.10 a obr. 2.11



Obr. 2.10
Nomogram PSV



Obr. 2.11
Nomogram PSV

Z doterajšieho výkladu je zjavné, že keď zakončovacia impedancia (záťaž) vedenia sa nerovná vlnovej impedancii vedenia, vzniknú na vedení stojaté vlny.

Vznik stojatých vln je nevhodný z týchto dôvodov.

- Na vedení vzniká vyššie napätie, čo spôsobuje pokles maximálneho možného preneseného výkonu.

Nech maximálne prípustné napätie na vedení bez nebezpečenstva prierazu je U_{\max} . Potom prispôbeným vedením možno preniesť výkon

$$P_{\max} = \frac{1}{2} \frac{U_{\max}^2}{Z_2} = \frac{1}{2} \frac{U_{\max}^2}{Z_V} \quad (2.8.27)$$

kde $Z_2=Z_V$ je záťaž vedenia. Pri neprispôbení nemôže tiež maximum napätia na vedení presiahnuť hodnotu U_{\max} . Ako ukážeme v ďalšom odstavci (vzťah(2.9.13)), je v tomto bode impedancia Z_V . Potom maximálny možný prenášaný výkon pri danom PSV je

$$P_{\max}^{PSV} = \frac{1}{2} \frac{U_{\max}^2}{Z_V r} = \frac{1}{r} P_{\max} \quad (2.8.28)$$

Teda pri neprispôbení je možné prenášať len r – krát menší maximálny výkon ako pri prispôbení.

- b) Na neprispôbenom vedení vzrastajú straty. Označme P_1 výkon na vstupe a P_2 výkon na výstupe vedenia s útlmom α a dĺžkou 1. Pri dokonalom prispôbení vzniká na vedení len postupujúca vlna a účinnosť prenášania výkonu možno vyjadriť vzťahom

$$\eta_{\max} = \frac{P_{2p}}{P_{1p}} = e^{-2\alpha l} \quad (2.8.29)$$

Výkon sa stráca len pôsobením útlmu vedenia. Dokonale prispôbiť možno vedenie na vstupe aj výstupe. Nedokonalé prispôbenie vedenia na vstupe nezvyšuje útlm vedenia, ale spôsobuje len zmenšenie vstupného výkonu, preto ho nebudeme vyšetrovať. Zvýšenie strát vedenia spôsobuje neprispôbenie záťaže. Označme ρ koeficient odrazu na výstupe vedenia, potom výstupný výkon pri neprispôbení je

$$P_2 = P_{2p} - P_{2r} = P_{2p} (1 - |\rho|^2) \quad (2.8.30)$$

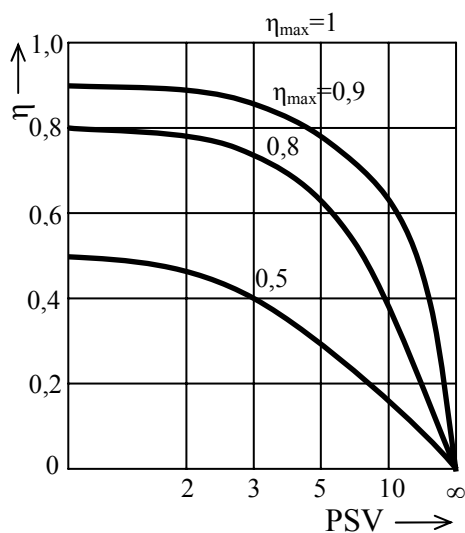
Vstupný výkon je pre postupujúcu vlnu, vplyvom útlmu vedenia, väčší a pre odrazenú vlnu menší

$$P_1 = P_{2p} (e^{2\alpha l} - |\rho|^2 e^{-2\alpha l}) \quad (2.8.31)$$

Potom účinnosť prenášania výkonu pre neprispôbené vedenie možno vyjadriť vzťahom

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{1 - |\rho|^2}{e^{2\alpha l} |\rho|^2 e^{-2\alpha l}} = \frac{1 - |\rho|^2}{1 - |\rho|^2 \eta_{\max}^2} \eta_{\max} \quad (2.8.32)$$

Táto závislosť je ako funkcia r pri η_{\max} ako parametri vynesená na obr. 2.12. Vzhľadom na to, že podľa bodu a) vzťah (2.8.28) požadujeme pre PSV $r < 2$, sa podľa obr. 2.12 pri zvolenom PSV zhoršuje účinnosť prenosu vedenia len málo.



Obr. 2.12

Závislosť účinnosti prenosu vedenia od PSV

- c) Malá zmena frekvencie alebo malá zmena dĺžky aj dlhšieho vedenia, môže spôsobiť podstatné zmeny hodnoty vstupnej impedancie.
- d) Pri širokopásmovom frekvenčne modulovanom prenášanom signály, keď k anténe vedie dlhé vedenie, ktoré nie je dokonale prispôbené ani pri vysielači ani pri anténe, dochádza k superpozícii prenášaného výkonu a výkonov odrazených od oboch koncov vedenia. Tým dochádza k zmiešavaniu signálov vznikajúcich v rôznych časových okamžikoch, čo spôsobuje skreslenie prenášaného signálu.

2.9. TRANSFORMÁCIA IMPEDANCIÍ NA VEDENÍ

Impedanciu v danom mieste vo vzdialenosti x od počiatku vedenie definujeme ako pomer fázorov napätia a prúdu v tomto mieste. Pomocou (2.3.2) a (2.3.3) dostaneme

$$Z(x) = \frac{U(x)}{I(x)} = \frac{U_1 \cosh \gamma x - Z_V I_V \sinh \gamma x}{I_1 \cosh \gamma x - \frac{U_1}{Z_V} \sinh \gamma x} = \frac{U_1 - Z_V I_1 \operatorname{tgh} \gamma x}{I_1 - \frac{U_1}{Z_V} \operatorname{tgh} \gamma x} \quad (2.9.1)$$

Keď si uvedomíme, že $U_1 = Z_1 I_1$, kde Z_1 je impedancia na vstupe vedenia, potom platí

$$Z(x) = Z_V \frac{Z_1 - Z_V \operatorname{tgh} \gamma x}{Z_V - Z_1 \operatorname{tgh} \gamma x} \quad (2.9.2)$$

Tento vzťah opisuje transformáciu impedancie Z_1 do miesta o vzdialenosti x od počiatku vedenia. Transformáciou sa rozumie zistenie toho, ako sa daná impedancia Z_1 javí v mieste x . Vzťah (2.9.2) možno chápať aj všeobecnejšie ako **transformáciu známej impedancie** Z_1 z určitého miesta na vedení o úsek vzdialenosti x **smerom k záťaži** (t.j. smerom ku koncu vedenia).

Podobným postupom možno pomocou vzťahov (2.3.8) a (2.3.9) vyjadriť hodnotu impedancie vedenia vo vzdialenosti y od jeho konca

$$Z(y) = \frac{U(y)}{I(y)} = \frac{U_2 \cosh \gamma y + Z_V I_2 \sinh \gamma y}{I_2 \cosh \gamma y + \frac{U_2}{Z_V} \sinh \gamma y} = \frac{U_2 + Z_V I_2 \operatorname{tgh} \gamma y}{I_2 + \frac{U_2}{Z_V} \operatorname{tgh} \gamma y} \quad (2.9.3)$$

Keď si uvedomíme, že $U_2 = Z_2 I_2$, kde Z_2 je impedancia na konci vedenia, potom platí

$$Z(y) = Z_V \frac{Z_2 + Z_V \operatorname{tgh} \gamma y}{Z_V + \frac{U_2}{Z_2} \operatorname{tgh} \gamma y} \quad (2.9.4)$$

Tento vzťah opisuje transformáciu impedancie Z_2 do miesta vo vzdialenosti y od konca vedenia. Vzťah (2.9.4) možno chápať aj všeobecnejšie, ako **transformáciu známej impedancie** Z_2 z určitého miesta na vedení o úsek vzdialenosti y **smerom ku zdroju** (ku generátoru, k počiatku vedenia). Porovnaním vzťahov (2.9.2) a (2.9.4) vidíme, že obidve transformácie sa líšia len znamienkom, ktoré vyjadruje smer transformácie: (-) k záťaži a (+) k zdroju.

V mikrovlnovej technike sa často pracuje s tzv. **normovanými impedanciami**, definovanými ako podiel skutočnej impedancie a vlnovej (charakteristickej) impedancie daného vedenia Z_V . Normované impedancie sú vyjadrené vzťahmi

$$z(x) = \frac{Z(x)}{Z_V}, \quad z(y) = \frac{Z(y)}{Z_V}, \quad z_1 = \frac{Z_1}{Z_V} \quad \text{a} \quad z_2 = \frac{Z_2}{Z_V} \quad (2.9.5)$$

Pre normované impedancie majú vzťahy (2.9.2) a (2.9.4) tvar

$$z(x) = \frac{z_1 - \operatorname{tgh} \gamma x}{1 - z_1 \operatorname{tgh} \gamma x} \quad (2.9.6)$$

$$z(y) = \frac{z_2 + \operatorname{tgh} \gamma y}{1 + z_2 \operatorname{tgh} \gamma y} \quad (2.9.7)$$

Pre bezstratové vedenia $\gamma = j\beta$ budú mať tieto vzťahy tvar

$$z(x) = \frac{z_1 - jtg\beta x}{1 - jz_1tg\beta x} \quad (2.9.8)$$

$$z(y) = \frac{z_2 + jtg\beta y}{1 + jz_2tg\beta y} \quad (2.9.9)$$

kde $\beta = \frac{2\pi}{\lambda_g}$.

Pripomeňme, že pre vedenie so stratami v transformačných vzťahoch vystupuje funkcia „tgh“, čo je neperiodická funkcia. V transformačných vzťahoch pre bezstratové vedenie vystupuje funkcia „tg“, ktorá je periodická s periódou $\beta x = \frac{2\pi x}{\lambda_g} = \pi$. Vzhľadom na to sa vlastnosti bezstratového vedenia periodicky opakujú po úsekoch dĺžky $\frac{\lambda_g}{2}$.

Transformujme danú impedanciu Z_1 o úsek $x = n\frac{\lambda_g}{2}$, kde $n = 1, 2, 3, \dots$. Dosadením do vzťahu (2.9.8) dostaneme

$$z(x) = \frac{z_1 - jtg \frac{2\pi n\lambda_g}{\lambda_g}}{1 - jz_1tg \frac{2\pi n\lambda_g}{\lambda_g}} = \frac{z_1 - jtg n\pi}{1 - jz_1tg n\pi} = z_1 \quad (2.9.10)$$

t.j. výsledná impedancia sa rovná východzej impedancii. Dostaneme tzv. **identickú transformáciu**, ktorá sa tiež podľa dĺžky transformačného úseku nazýva „**polvlnová**“ transformácia.

Transformujme danú impedanciu Z_1 o úsek $x = (2n-1)\frac{\lambda_g}{4}$, kde $n = 1, 2, 3, \dots$. Dosadením do vzťahu (2.9.8) dostaneme

$$z(x) = \frac{z_1 - jtg \frac{2\pi (2n-1)\lambda_g}{\lambda_g}}{1 - jz_1tg \frac{2\pi (2n-1)\lambda_g}{\lambda_g}} = \frac{z_1 - jtg(2n-1)\frac{\pi}{2}}{1 - jz_1tg(2n-1)\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{z_1} \quad (2.9.11)$$

t.j. výsledná normovaná impedancia je daná reciprokom (prevrátenou) hodnotou východzej impedancie. Dostaneme tzv. **reciprokú (inverznú) transformáciu**, ktorá sa tiež podľa dĺžky transformačného úseku nazýva „**štvrtvlnová**“ transformácia. Pripomeňme však, že pre skutočné (nenormované) impedancie má vzťah (2.9.11) tvar

$$Z(x) = \frac{Z_V^2}{Z_1} \quad (2.9.12)$$

Je užitočné tiež vyšetriť hodnoty impedancie v rôznych miestach vedenia, na ktorom existujú stojaté vlny. Dôležité sú najmä impedancie v miestach minima a maxima napät'ových resp. prúdových vln. V miestach napät'ových maxim je amplitúda napätia U_{\max} a amplitúda prúdu I_{\min} . dosadením polohy napät'ového maxima (2.8.7) do vzťahov (2.8.4) a (2.8.13) dostaneme pre impedanciu vedenia v maximách napät'ových stojatých vln vzťah

$$Z_{\max} = \frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{U_1^+ (1 + |\rho_2|)}{I_1^+ (1 - |\rho_2|)} = Z_V \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} = r Z_V \quad (2.9.13)$$

kde sme požili vzťahy (2.6.10) a (2.8.16). Impedancia Z_{\max} je na bezstratovom vedení reálna a je to najväčšia impedancia, ktorá sa na vedení s daným pomerom stojatých vln môže vyskytnúť. Pre normované impedancie ma vzťah (2.9.13) tvar

$$z_{\max} = r \quad (2.9.14)$$

V minime napät'ových stojatých vln sú amplitúdy napätia U_{\min} a prúdu I_{\max} . Dosadením polohy napät'ového minima (2.8.10) do vzťahov (2.8.4) a (2.8.13) dostaneme pre impedanciu vedenia v minimách napät'ových stojatých vln vzťah

$$Z_{\min} = \frac{U_{\min}}{I_{\max}} = \frac{U_1^+ (1 - |\rho_2|)}{I_1^+ (1 + |\rho_2|)} = Z_V \frac{1 - |\rho|}{1 + |\rho|} = \frac{Z_V}{r} \quad (2.9.15)$$

Impedancia Z_{\min} je na bezstratovom vedení reálna a je to najmenšia impedancia, ktorá sa na vedení s daným PSV môže vyskytnúť. Pre normované impedancie má vzťah (2.9.15) tvar

$$z_{\min} = \frac{1}{r} \quad (2.9.16)$$

Impedancie vo všetkých ostatných miestach na vedení, t.j. medzi maximami a minimami, sú komplexné a ich veľkosť leží medzi Z_{\min} a Z_{\max} .

Všetky uvedené transformačné vzťahy možno zapísať aj pre admitancie, a to buď skutočné, alebo normované. Napríklad pre **normované admitancie** dostaneme tieto **transformačné vzťahy**

$$y(x) = \frac{y_1 - \operatorname{tgh} \gamma x}{1 - y_1 \operatorname{tgh} \gamma x} \quad (2.9.17)$$

$$y(y) = \frac{y_2 + \operatorname{tgh} \gamma y}{1 + y_2 \operatorname{tgh} \gamma y} \quad (2.9.18)$$

kde normované admitancie sú určené vzťahmi

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{Y(x)}{Y_V} = \frac{1}{z(x)}, y_1 = \frac{Y_1}{Y_V} = \frac{1}{z_1} \\ y(y) &= \frac{Y(y)}{Y_V} = \frac{1}{z(y)}, y_2 = \frac{Y_2}{Y_V} = \frac{1}{z_2} \end{aligned} \quad (2.9.19)$$

Transformačné vzťahy pre impedancie na vedení (2.9.6) až (2.9.9) a (2.9.17), (2.9.18) je možné výhodne riešiť graficky v špeciálnej sieti ortogonálnych súradníc, v tzv. **Smithovom kruhovom impedančnom (admitančnom) diagrame**. Jeho odvodenie a spôsob použitia sú uvedené v prílohe skripta.

2.10. ZHRNUTIE DOLEŽITÝCH VZŤAHOV A POZNATKOV O VEDENIACH

V tab. 2.1 je prehľad najdôležitejších vzťahov vyjadrujúcich základné parametre vedenia pre vedenie so stratami, vedenie bez strát a vedenie s malými stratami. V tab. 2.2 je prehľad najdôležitejších vzťahov súvisiacich s koeficientom odrazu a pomerom stojatých vln pre vedenia s malými stratami. V tejto tabuľke uvádzame aj niektoré vzťahy, ktoré odvodíme neskôr, alebo ktoré je možné už z odvodených vzťahov odvodiť pomocou jednoduchých algebraických úprav.

V súvislosti s vedeniami je často potrebné počítať hĺbku vniku. Pri vysokých frekvenciách klesá hustota prúdu vo vodiči exponenciálne so vzdialenosťou od jeho povrchu. Hĺbka vniku je definovaná ako vzdialenosť od povrchu vodiča, na ktorej poklesne amplitúda hustoty prúdu e-krát. **Hĺbku vniku** možno vypočítať podľa vzťahu

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{\pi f\mu_0\sigma}} \quad (2.10.1)$$

kde ω je kruhová frekvencia, μ_0 - permeabilita vákua a σ -vodivosť vodiča. V tab. 2.3 je prehľad vodivostí niektorých kovov používaných pre konštrukciu vedení. Hĺbka vniku je malá, zvlášť keď frekvencia ω alebo vodivosť σ je veľká. Pre dobré vodiče je hĺbka vniku rádovo μm . Na obr. 2.13 je znázornená závislosť hĺbky vniku pre niektoré kovy v závislosti od frekvencie.

Prehľad najdôležitejších vzťahov o vedeniach

| Veličina | Vedenie | | |
|---|---|---|---|
| | so stratami | bez strát | s malými stratami |
| Konštantá šírenia $\gamma = \alpha + j\beta$ | $\sqrt{(R_1 + j\omega L_1)(G_1 + j\omega C_1)}$ | $j\omega\sqrt{L_1 C_1}$ | $\frac{R_1}{2Z_V} + \frac{G_1}{2Y_V} + j\omega\sqrt{L_1 C_1} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R_1}{2\omega L_1} - \frac{G_1}{2\omega C_1} \right)^2 \right]$ |
| Fázová konštantá β | $\beta = \text{Im } \gamma$ | $\omega\sqrt{L_1 C_1} = \frac{2\pi}{\lambda_g}$ | $\omega\sqrt{L_1 C_1} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R_1}{2\omega L_1} - \frac{G_1}{2\omega C_1} \right)^2 \right]$ |
| Útlm α | $\alpha = \text{Re } \gamma$ | 0 | $\alpha_r + \alpha_d = \frac{R_1}{2Z_V} + \frac{G_1}{2Y_V}$ |
| Vlnová impedancia Z_V | $\sqrt{\frac{R_1 + j\omega L_1}{G_1 + j\omega C_1}}$ | $\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$ | $\sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \left[1 - j \left(\frac{R_1}{2\omega L_1} - \frac{G_1}{2\omega C_1} \right)^2 \right]$ |
| Vstupná impedancia Z_{Vst} | $Z_V \frac{Z_2 + Z_V \text{tgh} \gamma l}{Z_V + Z_2 \text{tgh} \gamma l}$ | $Z_V \frac{Z_2 + jZ_V \text{tg} \beta l}{Z_V + jZ_2 \text{tg} \beta l}$ | |
| Vstupná admitancia Y_{Vst} | $Y_V \frac{Y_2 + Y_V \text{tgh} \gamma l}{Y_V + Y_2 \text{tgh} \gamma l}$ | $Y_V \frac{Y_2 + jY_2 \text{tg} \beta l}{Y_V + jY_2 \text{tg} \beta l}$ | |
| Vstupná impedancia skratovaného vedenia $Z_{Vst 0}$ | $Z_V \text{tgh} \gamma l$ | $jZ_V \text{tg} \beta l$ | $Z_V \frac{\alpha l + j \text{tg} \beta l}{1 + j \alpha l \text{tg} \beta l}$ |
| Vstupná impedancia otvoreného vedenia $Z_{Vst \infty}$ | $Z_V \text{ctgh} \gamma l$ | $-jZ_V \text{ctg} \beta l$ | $Z_V \frac{1 + j \alpha l \text{tg} \beta l}{\alpha l + j \text{tg} \beta l}$ |
| Vstupná impedancia vedenia dĺžky $l = n \lambda_g / 4$ | $Z_V \frac{Z_2 + Z_V \text{ctgh} \alpha l}{Z_V + Z_2 \text{ctgh} \alpha l}$ | $\frac{Z_V^2}{Z_2}$ | $Z_V \frac{Z_V + Z_2 \alpha l}{Z_2 + Z_V \alpha l}$ |
| Vstupné impedancie vedenia dĺžky $l = n \lambda_g / 2$ | $Z_V \frac{Z_2 + Z_V \text{tgh} \alpha l}{Z_V + Z_2 \text{tgh} \alpha l}$ | Z_2 | $Z_V \frac{Z_2 + Z_V \alpha l}{Z_V + Z_2 \alpha l}$ |

Tabuľka 2.2

Zhrnutie dôležitých vzťahov pre vedenie s malými stratami

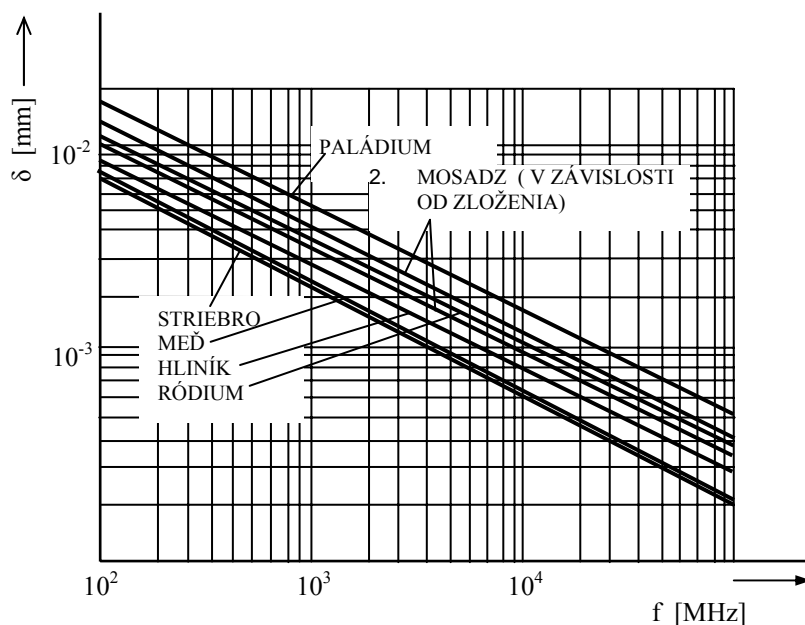
| | |
|--|--|
| Veličina | |
| Napät'ový koeficient odrazu | $\rho_U = \frac{U^-}{U^+} = \frac{Z_2 - Z_V}{Z_2 + Z_V} e^{-j2\beta l} = \rho_2 e^{-j2\beta l}$ $\rho_2 = \frac{Z_2 - Z_V}{Z_2 + Z_V} = \frac{Y_V - Y_2}{Y_V + Y_2}$ |
| Prúdový koeficient odrazu | $\rho_I = \frac{I^-}{I^+} = -\rho_2 e^{-j2\beta l} = -\rho_U$ |
| Pomer stojatých vln (PSV) | $r = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{1 + \rho_2 }{1 - \rho_2 } = \frac{1 + \rho }{1 - \rho }$ |
| Veľkosť koeficienta odrazu | $ \rho = \frac{r - 1}{r + 1}$ |
| Impedancia v mieste maxima napätia | $Z_{\max} = \frac{U_{\max}}{I_{\min}} = r Z_V$ |
| Impedancia v mieste minima napätia | $Z_{\min} = \frac{U_{\min}}{I_{\max}} = \frac{Z_V}{r}$ |
| Pomer výkonu odrazenej vlny P_r k výkonu postupujúcej vlny P_p | $\frac{P_r}{P_p} = \rho ^2 = \left(\frac{r - 1}{r + 1}\right)^2$ |
| Pomer výkonu preneseného do záťaže P_t k výkonu postupujúcej vlny P_p | $\frac{P_t}{P_p} = 1 - \rho ^2 = \frac{4r}{(r + 1)^2}$ |
| PSV dvoch neprispôsobení pri najnevhodnejšej fáze | $r_{\max} = r_1 r_2$ |
| PSV dvoch neprispôsobení pri najvhodnejšej fáze | $r_{\min} = \frac{r_2}{r_1} \quad r_1 < r_2$ |
| PSV n neprispôsobení | $r_{\max} = r_1 r_2 r_3 \dots r_n$ $r_{\min} = \frac{r_n}{r_1 r_2 \dots r_{n-1}}$ $r_1 < r_2 < \dots < r_n$ |

Tabuľka 2.3

Špecifická vodivosť niektorých materiálov pri 20°C

| Kov | σ (S/m) |
|------------|---------------------------|
| Meď | $5,8 \cdot 10^7$ |
| Hliník | $3,475 \cdot 10^7$ |
| Striebro | $6,275 \cdot 10^7$ |
| Zlato | $4,1 \cdot 10^7$ |
| Mosadz* | 1,22 až $1,51 \cdot 10^7$ |
| Zinok | $0,654 \cdot 10^7$ |
| Platina | $0,999 \cdot 10^7$ |
| Ródium | $1,96 \cdot 10^7$ |
| Paládium | $0,907 \cdot 10^7$ |
| Konštantán | $0,204 \cdot 10^7$ |
| Chrómnikel | $0,1 \cdot 10^7$ |

* v závislosti od zloženia



Obr. 2.13

Závislosť hĺbky vniku δ niektorých materiálov od frekvencie f

Meranie pomocou stojatých vln (PSV) je jedným zo základných meraní pri návrhu, testovaní a prispôbovaní vedení. Pri rôznych zakončeníach vedenia môžu nastať tieto prípady (obr. 2.14):

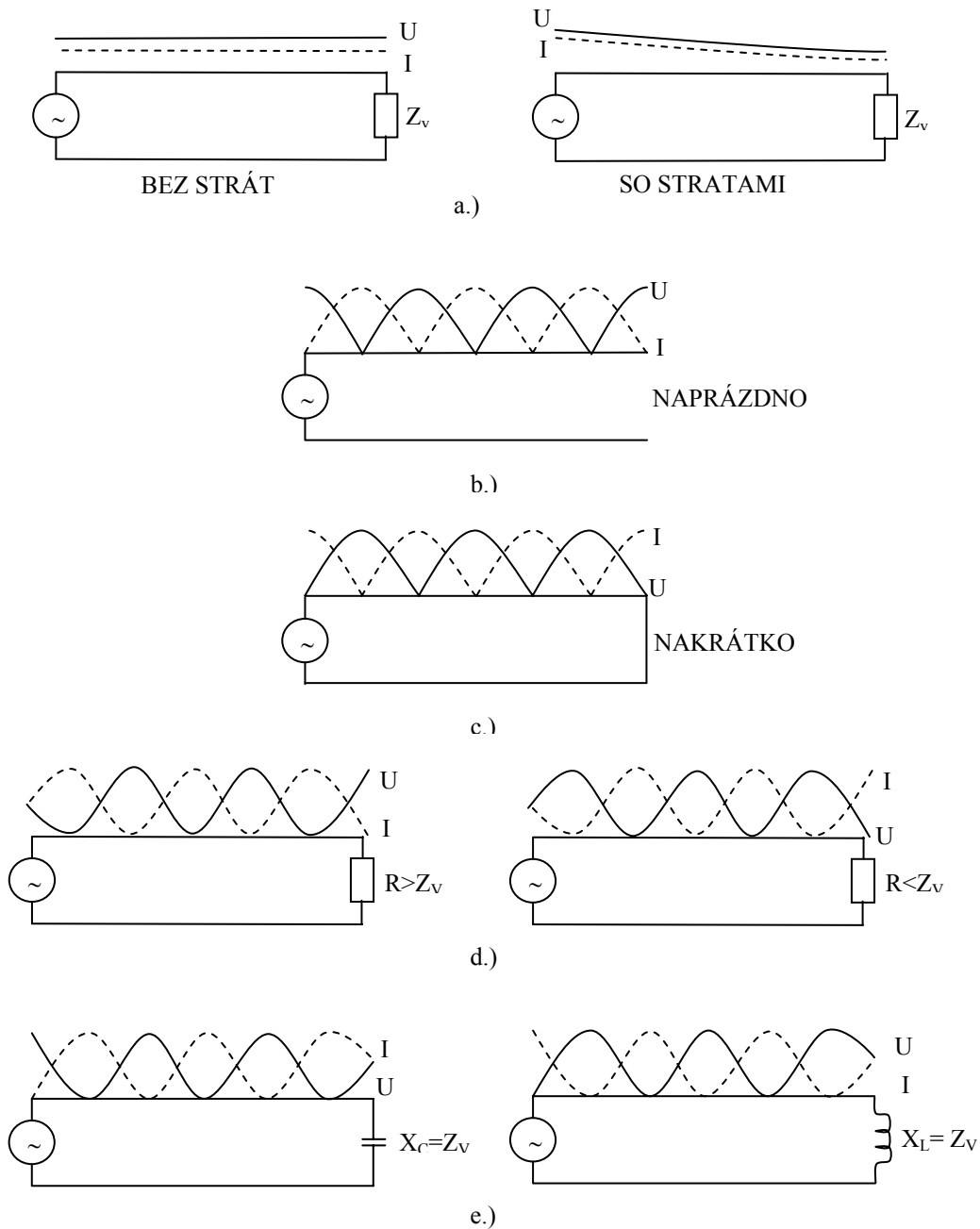
1) **Prispôbené zakončenie vedenia** (obr. 2.14a). Vedenie je zakončené impedanciou, ktorá sa rovná vlnovej impedancii Z_V vedenia. Potom na vedení nevznikajú stojaté vlny a PSV je nulové. Pre vedenie bez strát je napätie (aj prúd) pozdĺž vedenia konštantné. Pre vedenie so stratami exponenciálne klesá so vzdialenosťou od počiatku vedenia,

2) **Vedenie naprázdno** (obr. 2.14b) má na konci maximum napät'ovej a minimum prúdovej vlny. Pre bezstratové vedenie sa PSV blíži k nekonečnu.

3) **Vedenie nakrátko** (obr. 2.14c) má na konci minimum napät'ovej a maximum prúdovej vlny.

4) **Vedenie zakončené reálnou impedanciou (rezistorom)** (obr. 2.14d). Keď $R \neq Z_V$, vznikajú na vedení stojaté vlny. Keď je $R > Z_V$, rozloženie stojatých vln pozdĺž vedenia sa blíži stojatým vlnám pre vedenie naprázdno, keď je $R < Z_V$, rozloženie stojatých vln sa blíži stojatým vlnám pre vedenie nakrátko. V oboch prípadoch však minimum napät'ových aj prúdových vln nedosahujú nulovú hodnotu.

5) **Vedenie zakončené reaktanciou (X_C a X_L)** (obr. 2.14e). V oboch týchto prípadoch sú závislosti od pomeru veľkosti X_C resp. X_L ku Z_V napät'ová aj prúdová vlna fázovo posunutá vzhľadom na koniec vedenia. Na obr. 2.14e je znázornený priebeh PSV pre prípad $X_C = Z_V$ a $X_L = Z_V$.

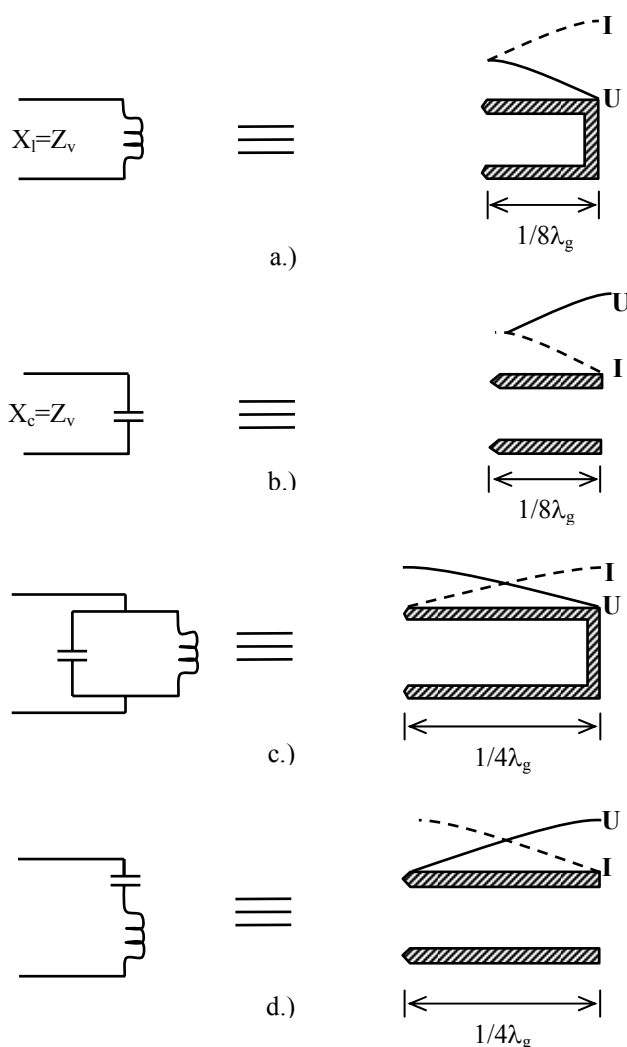


Obr. 2.14

Stojaté vlny na vedení pri rôznych hodnotách zakončovacej impedancie

Pri zakončení vedenia všeobecnou zakončovacou impedanciou, ktorá je rôzna od vlnovej impedancie Z_v , vznikajú na vedení stojaté vlny, ktorých fáza a veľkosť jednoznačne závisí od tejto impedancie.

Na vysokých frekvenciách sa často používa úsek vedenia dĺžky jednej štvrtiny a jednej osminy vlnovej dĺžky vlny vo vedení ako súčasť rezonančných obvodov. Napríklad úsek skratovaného vedenia, kratší ako $\frac{1}{4} \lambda_g$,



Obr. 2.15
Úseky vedenia rôznej dĺžky a náhradné schémy ich vstupnej impedancie

sa pre generátor javí ako indukčnosť. Keď je dĺžka tohto úseku vedenia presne $1/8 \lambda_g$, potom platí $X_L = Z_V$ (obr. 2.15a). Podobne úsek otvoreného vedenia, kratší ako $1/4 \lambda_g$ sa pre generátor javí ako kapacita. Keď je dĺžka tohto úseku vedenia presne $1/8 \lambda_g$, potom platí $X_C = Z_V$ (obr. 2.15b). Teda úsek vedenia dĺžky $1/4 \lambda_g$ pôsobí pre vedenie nakrátko ako **paralelný rezonančný obvod** (obr. 2.5c) a pre vedenie naprázdno ako **sériový rezonančný obvod** (obr. 2.15d). Z priebehov napätia a prúdu na obr. 2.15c a d vidíme, že tento obvod môžeme použiť ako **impedančný transformátor**.

Na obr. 2.16 je názorným spôsobom zobrazená závislosť impedancie, priebehu stojatých vln a ekvivalentného obvodu vedenia od jeho dĺžky pre vedenie naprázdno a nakrátko.

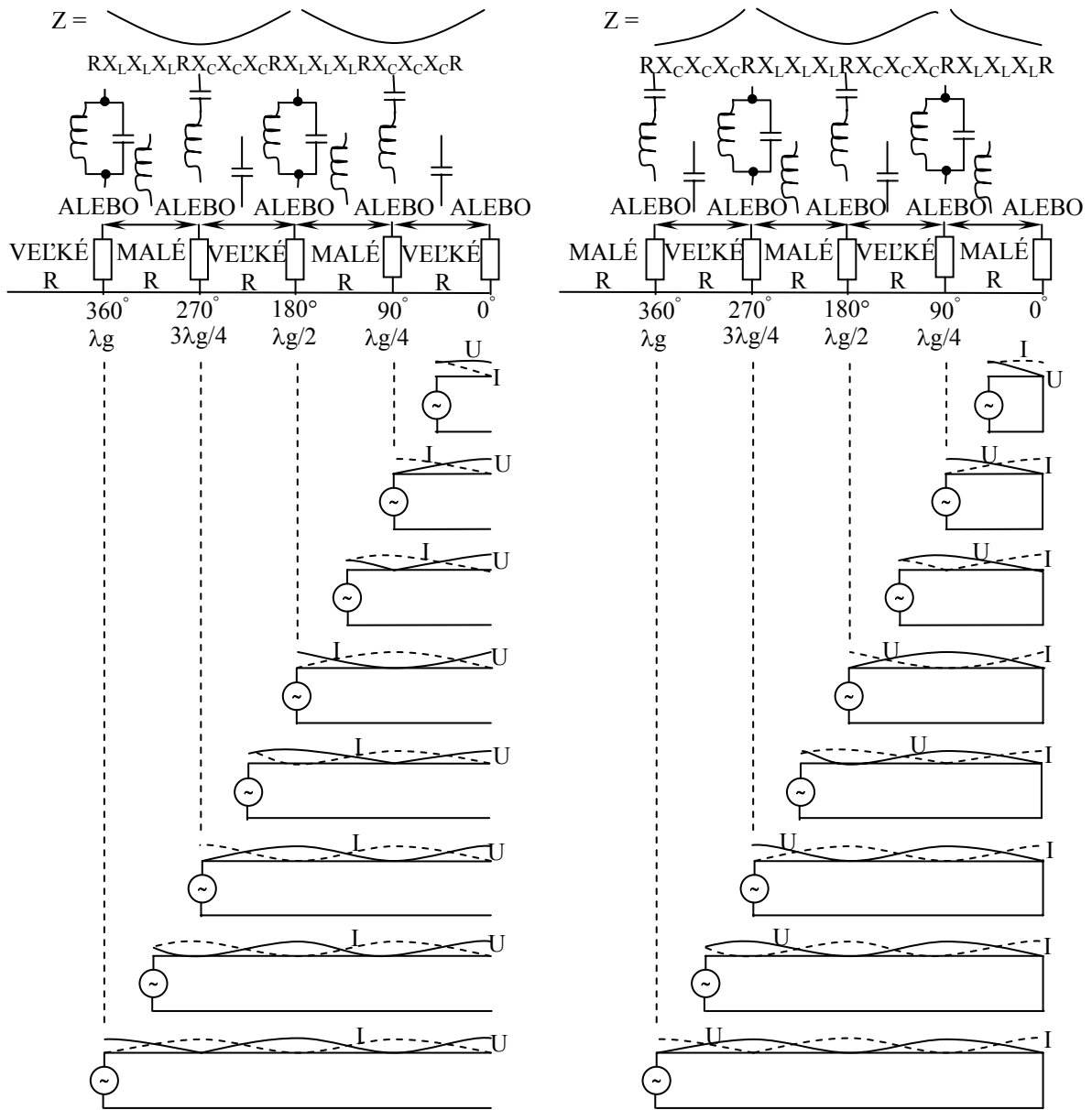
Pre vedenia s tuholátkovými alebo kvapalinovými dielektrikami je v praxi potrebné uvažovať aj **straty v dielektriku**. Tieto môžeme pomocou **stratového činiteľa $\text{tg } \delta$** (δ - stratový uhol) vyjadriť v tvare

$$\alpha_d = \frac{\pi}{\lambda_g} \text{tg } \delta \quad (2.10.2)$$

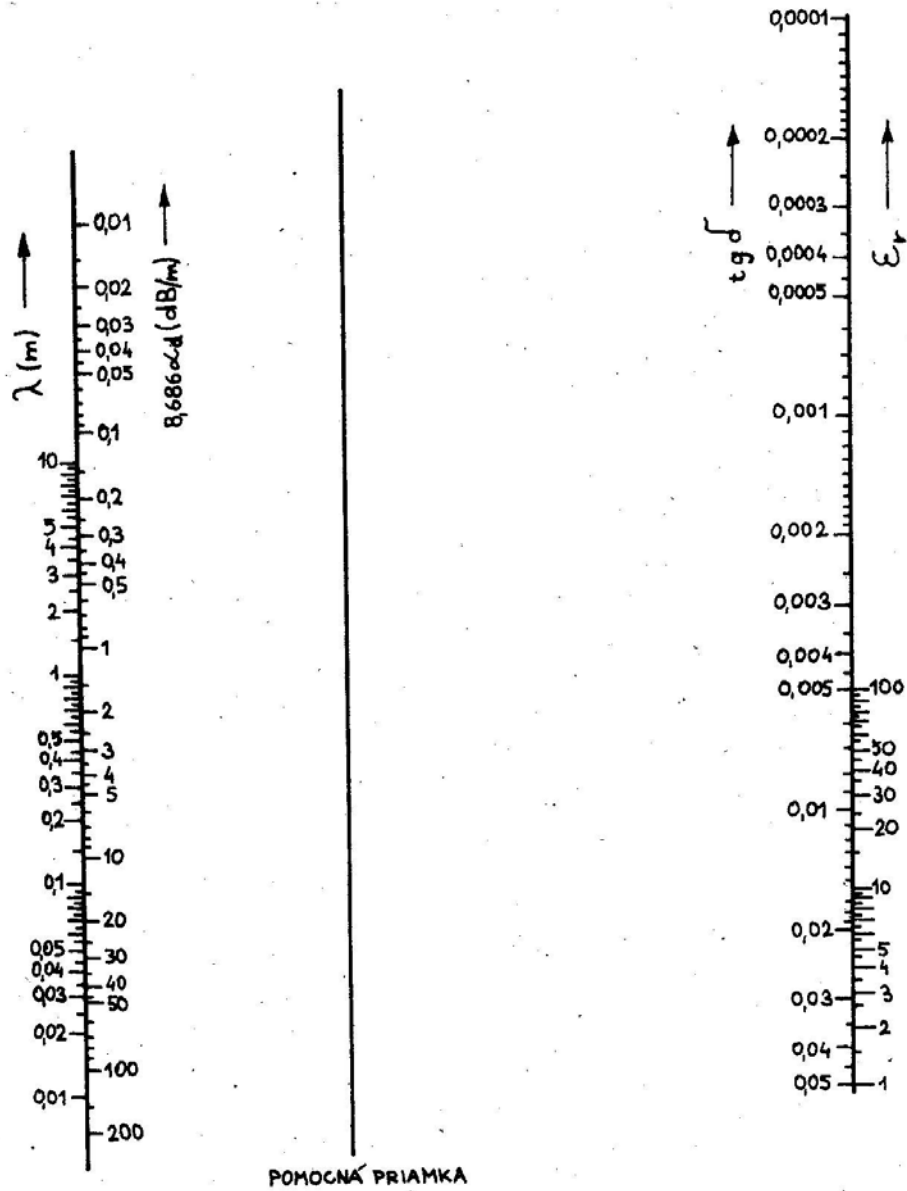
kde α_d je uvedené v m^{-1} a λ_g je vlnová dĺžka vo vedení. Tento vzťah môžeme v jednotkách dB/m zapísať v tvare

$$8,686 \alpha_d = \frac{8,686 \pi \text{tg } \delta}{\lambda} \sqrt{\epsilon_r} \quad (2.10.3)$$

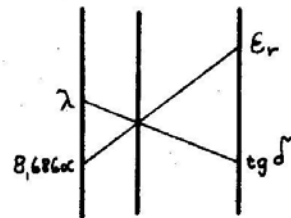
kde uvažujeme $\mu_r = 1$. Na obr. 2.17 je uvedený nomogram pre výpočet strát v dielektriku zostavený pomocou tohto vzťahu.



Obr. 2.16
Znázornenie náhradnej schémy vstupnej impedancie
rôzne dlhého otvoreného a skratovaného vedenia



KLÚČ:



Obr. 2.17
 Nomogram pre výpočet strát v dielektriku