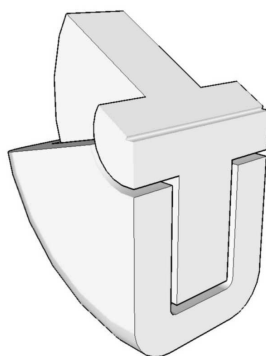


KPI FEI TU Košice

Spracoval: Štefan Maďar  
Editor: Branislav Sobota

## Quaternióny

Pomocný učebný text  
(len pre interné použitie)



INTERNÝ DOKUMENT

1998-2011

# Obsah

<b>1. ÚVOD</b> .....	<b>1</b>
1.1 SÚRADNICOVÝ SYSTÉM.....	1
1.2 SMER ROTÁCIE.....	1
1.3 EULEROVE UHLY.....	1
<b>2. GEOMETRICKÉ TRANSFORMÁCIE</b> .....	<b>1</b>
2.1 POSUNUTIE.....	1
2.2 ROTÁCIA.....	2
<b>3. DVE METÓDY OTÁČANIA</b> .....	<b>2</b>
3.1 EULEROVE UHLY.....	2
3.2 MATICE ROTÁCIÍ.....	3
3.3 QUATERNIÓNÝ.....	3
3.3.1 Historické pozadie.....	3
3.3.2 Základné vzťahy popisujúce quaternióny.....	4
3.3.3 Algebraické vlastnosti quaterniónov.....	7
3.3.4 Jednotkové quaternióny.....	8
3.3.5 Exponenciálna a logaritmická funkcia.....	9
3.3.6 Otáčanie pomocou quaterniónov.....	11
3.3.7 Intuícia v geometrii.....	15
3.3.8 Quaternióny a diferenciálny počet.....	15
3.4 ZHRNUTIE.....	17
<b>4. POROVNANIE QUATERNIÓNOV, EULEROVÝCH UHLOV A MATÍC</b> .....	<b>18</b>
4.1 EULEROVE UHLY/MATICE – NEVÝHODY.....	18
4.2 EULEROVE UHLY/MATICE – VÝHODY.....	20
4.3 QUATERNIÓNÝ – NEVÝHODY.....	20
4.4 QUATERNIÓNÝ – VÝHODY.....	20
4.5 ZHRNUTIE.....	21
4.6 INÉ METÓDY OTÁČANIA.....	21
<b>5. MOŽNOSTI IMPLEMENTÁCIE QUATERNIÓNOV</b> .....	<b>22</b>
5.1.1 Rotácie objektov.....	23
5.1.2 Animácia (pohyb) objektov.....	25
<b>6. KONVERZIE MEDZI METÓDAMI REPREZENTÁCIE ROTÁCIÍ</b> .....	<b>26</b>
6.1 PREVOD EULEROVÝCH UHLOV NA MATICE.....	26
6.2 PREVOD MATÍC NA EULEROVE UHLY.....	26
6.3 PREVOD QUATERNIÓNOV NA MATICE.....	27
6.4 PREVOD MATÍC NA QUATERNIÓNÝ.....	28
6.5 PREVODY MEDZI QUATERNIÓNAMI A EULEROVÝMI UHLAMI.....	28
<b>7. LITERATÚRA</b> .....	<b>29</b>

*Tento učebný text je určený ako interný rozširujúci pomocný učebný text pre predmet Systémy virtuálnej reality. Text obsahuje základný opis problematiky quaterniónov a ich využítí.*

Text neprešiel celkovou gramatickou, štylistickou a formátovacou úpravou

## 1. Úvod

Počítačová grafika je fenomén informatickej spoločnosti dnešnej doby. Jednou zo štandardných situácií aplikovaných v rámci počítačovej grafiky sú geometrické transformácie. Tieto podľa vzťahu vstupu a výstupu sú lineárne a nelineárne. Z hľadiska základných lineárnych geometrických transformácií sa používajú: posunuie, zrkadlenie, zmena mierky, skosenie a otočenie (rotácia). Práve rotácia patrí medzi najviac komplikované transformácie. Klasicky sa v súčasnej počítačovej grafike pre aplikáciu rotácie používa maticový zápis s použitím homogénnych súradníc. V tomto učebnom texte bude ozrejmeneá história a následne implementácia iného prostriedku pre vykonanie rotácií – quaterniónov.

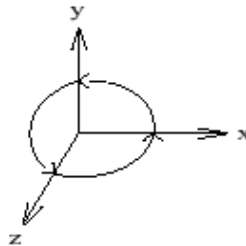
Budú použité nasledujúce dohody v označovaní.

### 1.1 Súradnicový systém

Bude použitý **pravotočivý** súradnicový systém. V počítačovej grafike sa bežne používa ľavotočivý súradnicový systém. To spôsobuje, že os  $z$  smeruje „do obrazovky“ čo vyzerá byť prirodzené. Pretože súradnice sú hlavne používané pre matematické odvádzanie, bude použitý matematický štandard – pravotočivý súradnicový systém.

### 1.2 Smer rotácie

Pre smer rotácie bude stále používaný matematický štandard, čiže proti smeru hodinových ručičiek. Smer rotácie okolo osi je možné zistiť pomocou pravidla pravej ruky: Nech palec pravej ruky smeruje súhlasne so smerom osi. Potom ostatné prsty predstavujú kladnú rotáciu okolo osi (pozri obrázok 1.1).



Obrázok 1.1

Z obrázka 1.1 vyplývajú tieto vlastnosti:

- otočenie okolo osi  $z$  „prenáša“ os  $x$  na os  $y$
- otočenie okolo osi  $y$  „prenáša“ os  $z$  na os  $x$
- otočenie okolo osi  $x$  „prenáša“ os  $y$  na os  $z$

### 1.3 Eulerove uhly

Rotácie pomocou Eulerových uhlov sú definované ako rotácia okolo každej z troch základných osí. Aby bolo poradie jednoznačné, je potrebné ho zdefinovať. V celom texte bude použité poradie rotácií  $x, y, z$ .

## 2. Geometrické transformácie

Geometrické transformácie budú popísané v nasledujúcich kapitolách. Hlavný dôraz bude kladený na rotácie, ale popísané budú aj iné geometrické transformácie pre osvetlenie spojitostí s použitím quaterniónov a pre lepšie pochopenie jednotlivých súvislostí.

### 2.1 Posunutie

Posunutie je jednou z najjednoduchších transformácií. Bod v priestore je posunutý z jednej pozície na ďalšiu.

Nech bod  $P \in \mathbb{R}^3$  je reprezentovaný trojicou  $(x, y, z)$ , pričom  $x, y, z \in \mathbb{R}$  a posunutie vektorom  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ .

Potom nová pozícia  $P'$  sa vypočíta jednoduchým sčítaním:

$$P' = (x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) \quad (1)$$

Definícia posunutia je jednoznačná. To znamená, že existuje iba jeden vektor posunutia, ktorý posúva  $P$  na  $P'$ .

## 2.2 Rotácia

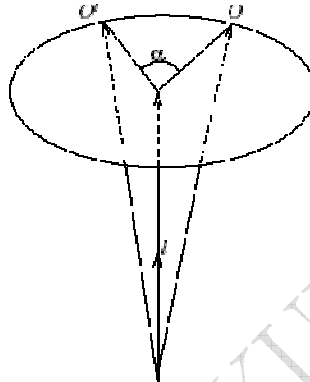
Rotácia (otočenie) v 3D nie je taká jednoduchá geometrická transformácia ako je posunutie a môže byť definovaná rôznymi spôsobmi. Vybraná nasledujúca definícia je daná Eulerovým (\*1707 - †1783) teorémom [Eul, 1752] – zapísaným modernejším zápisom (pozri obrázok 2.1):

### Dôsledok 1.

Nech  $O, O' \in R^3$  sú dve orientácie. Potom existuje os  $l \in R^3$  a uhol otočenia  $\alpha \in [-\pi, \pi]$  taký, že  $O$  prejde na  $O'$  ak je otočený o uhol  $\alpha$  okolo osi  $l$ .

**Je potrebné si zapamätať, že výsledok konštatuje existenciu, ale nie jedinečnosť takéhoto uhla a osi.**

V dôsledku 1 sú uvedené *orientácie* a *rotácia*. Je potrebné rozlišovať medzi týmito pojmami. Orientácia objektu v  $R^3$  je daná bežným vektorom (poloha voči stredu súradnicovej sústavy). Rotácia (otočenie) je definovaná osou a uhlom otočenia.



Obrázok 2.1

## 3. Dve metódy otáčania

Eulerov teorém (dôsledok 1) poskytuje jednoduchú definíciu otáčania. Vo väčšine literatúry sú použité *Eulerove uhly* na definíciu otočenia. Z týchto dvoch základných definícií môžu byť rotácie popísané matematicky rôznymi spôsobmi. V tomto texte sa bude označenie kombinácie definície a príslušnej matematickej reprezentácie nazývať *metóda otáčania*. V tejto kapitole budú popísané dve metódy otáčania:

- otáčanie definované Eulerovými uhlami a reprezentované všeobecnými transformačnými maticami.
- otáčanie definované Eulerovým teorémom a reprezentované quaterniónmi.

Cieľom tejto kapitoly je dostať sa až k implementácii všeobecných rotácií pomocou oboch metód. Porovnanie, ako jednotlivé metódy implementujú všeobecné rotácie je v kapitole 4.

### 3.1 Eulerove uhly

Priestor orientácií môže byť parametrizovaný pomocou Eulerových uhlov. Ak sú použité Eulerove uhly, potom všeobecné rotácie sú zapisované ako postupnosť rotácií okolo vzájomne pravouhlých (ortogonálnych) osí v priestore. Zvyčajne sa používajú osi  $x$ ,  $y$ , a  $z$  v Karteziánskom súradnicovom systéme. Rotácie okolo jednotlivých osí sa potom nazývajú *x-rol*, *y-rol* a *z-rol*.

Euler pôvodne vyvinul Eulerove uhly ako nástroj pre riešenie diferenciálnych rovníc. Neskôr sa Eulerove uhly stali najširšie používanou metódou parametrizácie priestoru rotácií. Ako bude popísané neskôr, táto voľba viedla k množstvu problémov. Vzatím do úvahy rotáciu ako akciu uskutočnenú na dosiahnutie danej orientácie, potom je možné Eulerove uhly použiť na parametrizáciu priestoru rotácií. Pre popis všeobecnej rotácie tak, ako bola popísaná v kapitole 2.2 sú potrebné tri Eulerove uhly  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , kde  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  a  $\alpha_3$  sú uhly otočenia jednotlivo okolo osi  $x$ ,  $y$  a  $z$ .

Konverzia zo všeobecnej rotácie na Eulerove uhly je nejednoznačná, pretože tá istá rotácia môže byť získaná pomocou odlišných skupín Eulerových uhlov (pozri [Fol, 1990]). Okrem toho, *výsledná rotácia závisí od poradia, v ktorom sú jednotlivé „častkové“ otočenia vykonané.*

### 3.2 Matice rotácií

Matice rotácií (tak často používané v počítačovej grafike) sú typickou voľbou pre implementáciu Eulerových uhlov. Pre každé čiastkové otočenie existuje odpovedajúca matica otáčania. A to  $x$  matica otáčania,  $y$  matica otáčania a  $z$  matica otáčania. Matice vytvárajú rotáciu ich vynásobením s vektorom pozície bodu v priestore a výsledkom je vektor pozície pre otočený bod. Matica otočenia je štvorcová matica, ale namiesto toho sa používa obyčajne homogénna štvorcová matica  $4 \times 4$  (pozri [Sob, 1995]). Všeobecná rotácia je získaná vynásobením troch matíc otáčania odpovedajúcich trom Eulerovým uhlom. Výsledná matica obsahuje všeobecnú rotáciu a môže byť aplikovaná na body, ktoré je potrebné otočiť.

*Násobenie matíc nie je vo všeobecnosti komutatívne. To je zapríčinené faktom, že rotácie v priestore nie je možné zameniť.*

A nakoniec je potrebné si uvedomiť, že použitie homogénnych transformačných matíc poskytuje jedinú implementáciu, ktorá v sebe zahŕňa všetky štandardné transformácie: posun, zmenu mierky, skosenie a viacero zobrazovacích transformácií.

### 3.3 Quaternióny

Druhou metódou otáčania je metóda definovaná Eulerovým teorémom a implementovaná quaterniónmi. Pretože quaternióny nie sú až tak známe ako transformačné matice a zatiaľ neboli ich vlastnosti prezentované v jednom ucelenom celku, je potrebné v tejto kapitole poskytnúť popis quaterniónov počnúc od ich historického pozadia až po vzťahy popisujúce quaternióny.

#### 3.3.1 Historické pozadie

Quaternióny boli vynájdené sirom Williamom Rowanom Hamiltonom (\*1809 - †1865) v roku 1843 (pozri [Ham, 1853] a [Ham, 1899]). Hamiltonovým cieľom bolo zovšeobecniť komplexné čísla do troch dimenzií, to znamená čísla vo forme  $a + \mathbf{i}b + \mathbf{j}c$ , kde  $a, b, c \in \mathbb{R}$  a  $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = -1$ . Hamilton nikdy nedokázal uskutočniť toto zovšeobecnenie, pretože sa neskôr ukázalo, že množina troj-rozmerných komplexných čísel nie je uzavretá na násobenie. V roku 1966 Kenneth O. May to elegantne dokázal (pozri [May, 1966]).

#### Dôsledok 2.

*Množina troj-rozmerných komplexných čísel nie je uzavretá na násobenie.*

**Dôkaz** (voľne prevzatý od Kennetha O. Maya 1966 (pozri [May, 1966])):

Predpokladajme, že pre komplexné čísla platia všeobecné pravidlá aritmetiky a teda  $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = -1$ .

Dôkaz je sporom, takže predpokladajme, že existuje uzavretie na násobenie. Pretože násobenie je uzavreté, existuje  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , ktoré vyhovujú vzťahu

$$\mathbf{i}\mathbf{j} = a + \mathbf{i}b + \mathbf{j}c. \quad (2)$$

Vynásobením celého vzťahu konštantou  $\mathbf{i}$  dostaneme

$$-\mathbf{j} = -b + \mathbf{i}a + \mathbf{i}\mathbf{j}c. \quad (3)$$

Použitím substitúcie za  $\mathbf{i}\mathbf{j}$  zo vzťahu (2) dostaneme

$$-\mathbf{j} = -b + \mathbf{i}a + (a + \mathbf{i}b + \mathbf{j}c)c. \quad (4)$$

Po krátkych úpravách dostaneme

$$0 = (ac - b) + \mathbf{i}(a + bc) + \mathbf{j}(c^2 + 1). \quad (5)$$

Teda  $ac - b = 0$ ,  $a + bc = 0$  a  $c^2 + 1 = 0$ .

Vzťah

$$c^2 + 1 = 0 \quad (6)$$

pôsobí spor, pretože  $c$  je reálne číslo podľa predpokladu.

Jednou z motivácií sira Hamiltona pre hľadanie troj-rozmerných komplexných čísel bolo nájdenie popisu rotácie v priestore, odpovedajúcemu komplexným číslam, kde násobenie odpovedá otočeniu a zmene mierky v rovine.

Kým sa prechádzal po Royal Canal v Dubline v jeden pondelok v októbri 1843, prišiel sir Hamilton na to, že sú potrebné **štyri** čísla pre popis otočenia nasledovaného zmenou mierky. Jedno číslo popisuje veľkosť zmeny mierky, jedno veľkosť uhla (v stupňoch), o ktorý sa bude otáčať, a posledné dve čísla označujú rovinu, v ktorej sa bude vektor otáčať (rovina  $xy$  sa môže otáčať do ľubovoľnej roviny v  $xyz$  priestore prostredníctvom pôvodnej roviny udaním uhlov otočenia okolo osí  $x$  a  $y$ ). Potom sir Hamilton našiel uzavretie na násobenie štvor-rozmerných komplexných čísel v tvare  $\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$ , kde  $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{i}\mathbf{j}\mathbf{k} = -1$ . Sir Hamilton nazval tieto štvor-rozmerné

komplexné čísla *quaternióny*.

Quaternióny sa obvyčajne zapisujú v tvare  $[s, \mathbf{v}]$ ,  $s \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  pričom  $s$  sa nazýva *skalárna časť* a  $\mathbf{v} = (x, y, z)$  sa nazýva *vektorová časť*.

### 3.3.2 Základné vzťahy popisujúce quaternióny

V tejto kapitole budú uvedené označenia používané pre quaternióny a zadané jednotlivé matematické operácie ako sčítanie, násobenie, odčítanie a násobenie skalárom. Nakoniec bude zadaný komplexne združený (konjugovaný) quaternión a inverzný quaternión.

#### Označenie

Použitie je znamienko „ $\equiv$ “ pre označenie „rovná sa podľa definície“. Uzavreté intervaly na reálnej osi sú označované ako  $[a, b] \equiv \{x \mid a \leq x \leq b, a, b, x \in \mathbb{R}\}$ . Intervaly, ktoré sú uzavreté iba z jednej strany sú označované podobne ako uzavreté intervaly  $]a, b] \equiv \{x \mid a < x \leq b, a, b, x \in \mathbb{R}\}$ . Množina  $n$ -krát diferencovateľných funkcií od  $A$  do  $B$  (na intervale  $[A, B]$ ) so spojitými deriváciami je označovaná  $C^n(AB)$ .

#### Definícia 1.

Množina quaterniónov je označená  $H$ .

Quaternióny pozostávajú zo skalárnej časti  $s \in \mathbb{R}$  a vektorovej časti  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ . Tento zápis bude použitý v ďalších definíciách.

#### Definícia 2.

Nech  $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1$ ,  $\mathbf{ij} = \mathbf{k}$  a  $\mathbf{ji} = -\mathbf{k}$ . Potom  $q \in H$  môže byť zapísaný ako:

$$\begin{aligned} q &\equiv [s, \mathbf{v}] \quad , \quad s \in \mathbb{R}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \\ &\equiv [s, (x, y, z)] \quad , \quad s, x, y, z \in \mathbb{R} \\ &\equiv s + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z, \quad s, x, y, z \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{7}$$

Množinu quaterniónov  $\{[s, \mathbf{0}] \mid s \in \mathbb{R}\}$  bude označená písmenom  $\mathbf{R}$  a množinu quaterniónov  $\{[0, \mathbf{v}] \mid \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3\}$  písmenom  $\mathbf{R}^3$ .

#### Definícia 3.

Nech  $q, q' \in H$  kde  $q = [s, (x, y, z)]$  a  $q' = [s', (x', y', z')]$ . Potom operátor sčítania „+“ je definovaný:

$$\begin{aligned} q + q' &\equiv [s, \mathbf{v}] + [s', \mathbf{v}'] \equiv [s, (x, y, z)] + [s', (x', y', z')] \\ &\equiv (s + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z) + (s' + \mathbf{i}x' + \mathbf{j}y' + \mathbf{k}z') \end{aligned} \tag{8}$$

#### Dôsledok 3. (sčítanie quaterniónov)

Nech  $q, q' \in H$  kde  $q = [s, (x, y, z)]$  a  $q' = [s', (x', y', z')]$ . Potom  $q + q' = [s + s', \mathbf{v} + \mathbf{v}']$ .

#### Dôkaz

$$\begin{aligned} q + q' &\equiv [s, \mathbf{v}] + [s', \mathbf{v}'] \\ &\equiv (s + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z) + (s' + \mathbf{i}x' + \mathbf{j}y' + \mathbf{k}z') \\ &= (s + s') + \mathbf{i}(x + x') + \mathbf{j}(y + y') + \mathbf{k}(z + z') \\ &\equiv [s + s', \mathbf{v} + \mathbf{v}'] \end{aligned} \tag{9}$$

#### Definícia 4.

Nech  $q, q' \in H$  kde  $q = (s + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z)$  a  $q' = (s' + \mathbf{i}x' + \mathbf{j}y' + \mathbf{k}z')$ . Potom násobenie je definované:

$$qq' \equiv [s, \mathbf{v}][s', \mathbf{v}'] \equiv [s, (x, y, z)][s', (x', y', z')] \equiv (s + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z)(s' + \mathbf{i}x' + \mathbf{j}y' + \mathbf{k}z') \tag{10}$$

**Dôsledok 4. (násobenie quaterniónov)**

Nech  $q, q' \in H$  kde  $q = [s, \mathbf{v}]$  a  $q' = [s', \mathbf{v}']$ . Potom  $qq' = [ss' - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}', \mathbf{v} \times \mathbf{v}' + s\mathbf{v}' + s'\mathbf{v}]$ , pričom  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$  označuje skalárne násobenie a  $\times$  označuje vektorové násobenie v  $\mathbf{R}^3$ .

**Dôkaz**

Z definície 2 je možné získať nasledovné vzťahy:  $\mathbf{jk} = \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{kj} = -\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{ik} = -\mathbf{j}$  a  $\mathbf{ki} = \mathbf{j}$ .

Tieto vzťahy budú použité v nasledujúcom dôkaze:

$$\begin{aligned} qq' &\equiv [s, \mathbf{v}][s', \mathbf{v}'] \\ &\equiv (s + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z)(s' + \mathbf{i}x' + \mathbf{j}y' + \mathbf{k}z') \\ &= ss' - (xx' + yy' + zz') + \mathbf{i}(sx' + s'x + yz' - zy') + \\ &\quad \mathbf{j}(sy' + s'y + zx' - xz') + \mathbf{k}(sz' + s'z + xy' - yx') \\ &\equiv [ss' - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}', \mathbf{v} \times \mathbf{v}' + s\mathbf{v}' + s'\mathbf{v}] \end{aligned} \quad (11)$$

**Poznámka 1.**

Násobenie quaterniónov nie je vo všeobecnosti komutatívne (napríklad  $\mathbf{jk} = \mathbf{i}$  ale  $\mathbf{kj} = -\mathbf{i}$ ).

**Dôsledok 5. (vlastnosti násobenia quaterniónov)**

Nech  $p, q, q' \in H$  a  $r \in \mathbf{R}$ . Potom:

$$\begin{aligned} (pq)q' &= p(qq') && \text{(Násobenie quaterniónov je asociatívne)} \\ p(q + q') &= pq + pq' && \text{(Násobenie quaterniónov je distributívne)} \\ (q + q')p &= qp + q'p && \text{vzhľadom na sčítanie} \end{aligned} \quad (12)$$

Násobenie quaterniónov skalárom je najjednoduchšie si predstaviť tým, že  $r \in \mathbf{R}$  označuje quaternión  $[r, \mathbf{0}]$ .

**Definícia 5.**

Nech  $q \in H$  a  $r \in \mathbf{R}$ . Potom násobenie skalárom je definované

$$rq \equiv [r, \mathbf{0}]q \quad (13)$$

**Dôsledok 6. (násobenie skalárom)**

Nech  $q \in H$ , kde  $q = [s, \mathbf{v}]$  a nech  $r \in \mathbf{R}$ . Potom

$$rq = qr = [r, \mathbf{0}][s, \mathbf{v}] = [rs, r\mathbf{v}]. \quad (14)$$

**Je potrebné si zapamätať, že z dôsledku 6 vyplýva komutatívnosť násobenia skalárom.**

V ďalšom bude používané označenie  $\frac{q}{r}$  s významom  $\frac{1}{r}q$ , kde  $q \in H$  a  $r \in \mathbf{R}$ . Nasledujúca definícia hovorí o odčítaní quaterniónov.

**Definícia 6.**

Je dané  $q, q' \in H$ , odčítanie je potom definované  $q - q' \equiv q + (-1)q'$ .

**Dôsledok 7. (odčítanie quaterniónov)**

Nech  $q, q' \in H$ , kde  $q = [s, \mathbf{v}]$  a  $q' = [s', \mathbf{v}']$ . Potom

$$q - q' = q + (-1)q' = [s - s', \mathbf{v} - \mathbf{v}']. \quad (15)$$

Teraz je možné zdefinovať konjugovaný quaternión podobne ako je zdefinované konjugované komplexné číslo.

**Definícia 7.**

Nech  $q \in H$ . Potom  $q^*$  sa nazýva konjugovaný quaternión quaternióna  $q$  a je definovaný  $q^* \equiv [s, \mathbf{v}]^* \equiv [s, -\mathbf{v}]$ .

**Dôsledok 8.**

Nech  $p, q \in H$ . Potom:

- $(q^*)^* = q$
  - $(pq)^* = q^* p^*$
  - $(p+q)^* = p^* + q^*$
  - $qq^* = q^* q$
- (16)

**Definícia 8.**

Nech  $p \in H$  a nech mapovanie  $\|\cdot\|: H \rightarrow \mathbf{R}$  je definované ako  $\|q\| \equiv \sqrt{qq^*}$ . Toto mapovanie sa nazýva **norma** a  $\|q\|$  je **norma**  $q$ .

**Dôsledok 9.**

Nech  $q, q' \in H$  a nech  $\|\cdot\|: H \rightarrow \mathbf{R}$  je dané podľa definície 8. Potom platia nasledujúce vzťahy:

$$\|q\| = \sqrt{s^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{s^2 + x^2 + y^2 + z^2} \quad (17)$$

$$\|q^*\| = \|q\| \quad (18)$$

$$\|qq'\| = \|q\| \|q'\| \quad (19)$$

**Dôkaz**

Dôkaz platnosti vzťahov (17) a (18) je triviálny. Dôkaz platnosti vzťahu (19) je nasledovný:

$$\|qq'\| = \sqrt{qq'(qq')^*} = \sqrt{qq'q'^*q^*} = \sqrt{q\|q'\|^2 q^*} = \sqrt{qq^* \|q'\|^2} = \sqrt{\|q\|^2 \|q'\|^2} = \|q\| \|q'\|$$

V ďalšom bude potrebný vnútorný produkt dvoch quaterniónov. Tiež je potrebné ukázať, že mapovanie normy je skutočne normou vo všeobecnom matematickom ponímaní. Zo vzťahu (17) v dôsledku 9 vyplýva, že norma quaternióna  $q$  môže byť zapísaná tak, ako je bežne získaná z vnútorného produktu (ak  $q \in H$  je stotožnený s odpovedajúcim vektorom v  $\mathbf{R}^4$ ).

**Definícia 9.**

Nech  $q, q' \in H$ ,  $q = [s, \mathbf{v}] = [s, (x, y, z)]$ ,  $q' = [s', \mathbf{v}'] = [s', (x', y', z')]$ . Vnútorný produkt je definovaný takto:  
 $\bullet: H \times H \rightarrow \mathbf{R}$  kde  $q \bullet q' = ss' + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' = ss' + xx' + yy' + zz'$ .

**Je potrebné si zapamätať, že definícia poskytuje  $q \bullet q = s^2 + x^2 + y^2 + z^2$ .**

**Poznámka 2.**

Norma quaternióna  $q$  môže byť získaná ako  $\|q\| = \sqrt{q \bullet q}$ . A navyše,  $\|\cdot\|$  je normou v obvyklom matematickom ponímaní.

**Dôkaz**

To, že zobrazenie „ $\bullet$ “ vypočítava normu umocnenú na druhú, vyplýva priamo z dôsledku 9 a definície 9. Nech  $q = [s, (x, y, z)] \in H$ . Ak stotožníme  $q$  s  $(s, x, y, z) \in \mathbf{R}^4$ , predchádzajúca metóda výpočtu normy je totožná s bežnou Euklidovskou normou v  $\mathbf{R}^4$ . Teda norma quaternióna je normou v pravom slova zmysle.

**Dôsledok 10.**

Nech  $q, q' \in H$ . Nech sú  $q, q'$  zadané ako odpovedajúce štvor-rozmerné vektory a nech  $\alpha$  je uhol medzi nimi. Potom  $q \bullet q' = \|q\| \|q'\| \cos \alpha$ .



### 3.3.3 Algebraické vlastnosti quaterniónov

V tejto kapitole bude prezentované, že množina quaterniónov  $H \setminus \{[0, (0,0,0)]\}$  je **ne-Abelianova grupa** pre násobenie quaterniónov. Na konci kapitoly bude poskytnutý súhrn niekoľkých ďalších algebraických vlastností quaterniónov.

#### Definícia 10.

Množina quaterniónov  $H \setminus \{[0, (0,0,0)]\}$  sa označuje  $\overset{\circ}{H}$ .

#### Definícia 11.

Nech  $G$  je množina s operátorom  $\cdot : G \times G \rightarrow G$  definovaným  $(a, b) \rightarrow a \cdot b \equiv ab$ .  $G$  je **grupa**, ak

- $a(bc) = (ab)c$  pre všetky  $a, b, c \in R$  (Operátor je asociatívny)
- Existuje práve jeden  $I \in G$  taký, že  $Ia = aI = a$  pre všetky  $a \in G$ .  
( $I$  je neutrálny prvok)
- Pre všetky  $a \in G$  existuje prvok  $a^{-1} \in G$  taký, že  $aa^{-1} = a^{-1}a = I$ .  
( $a^{-1}$  je inverzný prvok k prvku  $a$ )

Ak platí  $ab = ba$  pre všetky  $a, b \in G$ , potom  $G$  sa nazýva **Abelovská** alebo **komutatívna grupa**.

To, že existuje neutrálny a inverzný prvok v  $\overset{\circ}{H}$  pre násobenie quaterniónov, ukazujú nasledujúce lemy.

#### Lemma 1.

Prvok  $I = [1, \mathbf{0}] \in \overset{\circ}{H}$  je jedinečný neutrálny prvok pre násobenie quaterniónov.

#### Dôkaz

Nech je daný  $q \in H$ . Z dôsledku 6 vyplýva, že  $qI = Iq = [1s, 1\mathbf{v}] = [s, \mathbf{v}] = q$ . Teda  $I$  je neutrálny prvok.  $I$  je taktiež jediný prvok, ktorý spĺňa požiadavky z definície 11. Pre objasnenie predpokladajme, že  $J$  tiež spĺňa tieto podmienky. Potom  $IJ = J$ , pretože  $J$  je neutrálny prvok. A ďalej  $IJ = I$  preto, lebo  $I$  je neutrálny prvok.

Z toho dostávame, že  $I = IJ = J$  takže  $I = J$  je jediný neutrálny prvok v  $\overset{\circ}{H}$ .

#### Lemma 2.

Nech  $q \in \overset{\circ}{H}$ . Potom existuje  $q^{-1} \in \overset{\circ}{H}$  taký, že  $qq^{-1} = q^{-1}q = I$ . A ďalej ešte  $q^{-1}$  je jedinečný a daný vzťahom:

$$q^{-1} = \frac{q^*}{\|q\|^2} \quad (20)$$

#### Dôkaz

Nech je daný  $q \in H$ .

#### Jedinečnosť

Nech oba quaternióny  $p_1, p_2 \in H$  sú inverznými ku  $q$ . To, že potom  $p_1$  a  $p_2$  sú rovnaké vyplýva z nasledujúceho vzťahu:

$$p_1 = p_1 I = p_1 (qp_2) = (p_1 q) p_2 = I p_2 = p_2 \quad (21)$$

#### Existencia

Nech  $p = \frac{q^*}{\|q\|^2}$ . Potom

$$\begin{aligned}
 qp &= q \frac{q^*}{\|q\|^2} = \frac{qq^*}{\|q\|^2} = \frac{\|q\|^2}{\|q\|^2} = 1 \equiv I \\
 pq &= \frac{q^*}{\|q\|^2} q = \frac{q^*q}{\|q\|^2} = \frac{qq^*}{\|q\|^2} = \frac{\|q\|^2}{\|q\|^2} = 1 \equiv I
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

Takže každý quaternión v  $\mathring{H}$  má svoj inverzný quaternión.

V ďalšom bude použitý zápis  $\frac{p}{q}$  pre  $pq^{-1}$ . Je potrebné si zapamätať, že tento zápis je vo všeobecnosti odlišný od  $q^{-1}p$  pretože násobenie quaterniónov nie je komutatívne.

### Dôsledok 11.

Množina  $\mathring{H}$  s násobením quaterniónov je **ne-Abelovská grupa**.

### Dôkaz

Za povšimnutie stojí, že množina quaterniónov je uzavretá na násobenie. To vyplýva priamo z definície 4 a dôsledku 4. Prvá požiadavka z definície 11 (definícia grupy) vyplýva z dôsledku 5. Druhá a tretia požiadavka pochádzajú z lemy 1 a 2. Grupa je **ne-Abelovská**, pretože násobenie quaterniónov nie je komutatívne.

### Ďalšie algebraické vlastnosti quaterniónov

Množina quaterniónov spĺňa niektoré ďalšie vlastnosti, ktoré je možné zhrnúť do nasledujúcich bodov (tieto vlastnosti sú uvedené bez predchádzajúcej teórie a bez dôkazov):

- Množina quaterniónov je **Abelovskou grupou**  $(\mathring{H}, +)$  s operáciou sčítania.
- Množina quaterniónov je **ne-Abelovský kruh**  $(\mathring{H}, +, \cdot)$ , kde znak „+“ označuje operáciu sčítania quaterniónov a znak „ $\cdot$ “ označuje operáciu násobenia quaterniónov.

### 3.3.4 Jednotkové quaternióny

V tejto kapitole je popísaná podmnožina grupy quaterniónov a tou je množina jednotkových quaterniónov.

### Definícia 12.

Nech  $q \in \mathring{H}$ . Ak  $\|q\| = 1$ , potom  $q$  sa nazýva **jednotkový quaternión**. Pre označenie množiny jednotkových quaterniónov bude použité označenie  $H_1$ .

Množina jednotkových quaterniónov tvorí jednotkovú guľu v štvor-rozmernom priestore. Neskôr bude prezentované, že množina jednotkových quaterniónov hrá dôležitú úlohu vo vzťahu k všeobecným rotáciám.

### Dôsledok 12.

Nech  $q = [s, \mathbf{v}] \in H_1$ . Potom existuje  $\mathbf{v}' \in \mathbf{R}^3$  a  $\alpha \in ]-\pi, \pi]$  také, že  $q = [\cos \alpha, \mathbf{v}' \sin \alpha]$ .

### Dôkaz

Ak  $q = [1, \mathbf{0}]$  nech  $\alpha = 0$  a  $\mathbf{v}'$  môže byť ľubovoľný jednotkový vektor v  $\mathbf{R}^3$ . Ak  $q \neq [1, \mathbf{0}]$ , nech  $k = |\mathbf{v}|$  a  $\mathbf{v}' = \frac{1}{k} \mathbf{v}$ . Potom  $\mathbf{v} = k\mathbf{v}'$  kde  $\mathbf{v}'$  je jednotkový vektor v  $\mathbf{R}^3$ . Pretože  $q$  je jednotkový quaternión, je možné dostať:

$$1 = \|q\|^2 = s^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = s^2 + k^2 \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' = s^2 + k^2 \tag{23}$$

Vzťah  $s^2 + k^2 = 1$  popisuje kružnicu v rovine. Pretože kružnica je tiež popísaná vzťahom  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ , existuje  $\alpha \in ]-\pi, \pi]$  také, že  $s = \cos \alpha$  a  $k = \sin \alpha$ . A nakoniec požadované:

$$q = [s, \mathbf{v}] = [s, \mathbf{v}'k] = [\cos \alpha, \mathbf{v}' \sin \alpha] \quad (24)$$

**Dôsledok 13.**

Nech  $q, q' \in H_1$ . Potom platia nasledujúce vzťahy:

$$\|qq'\| = 1 \quad (25)$$

$$q^{-1} = q^* \quad (26)$$

**Dôkaz**

$$\|qq'\| = \|q\| \|q'\| = 1 \quad (27)$$

pretože  $\|q\| = \|q'\| = 1$ . (pomocou vzťahu (19) v dôsledku 9)

$$q^{-1} = q^* / \|q\|^2 = q^* \quad (28)$$

pretože  $\|q\| = 1$ .

Množina jednotkových quaterniónov  $H_1$  je zjavne podmnožinou  $\mathring{H}$ , ale z definície 13 a dôsledku 14 vyplýva, že  $H_1$  vytvára **podgrupu**  $\mathring{H}$ .

**Definícia 13.**

Nech  $G$  je grupa a nech  $F \neq \emptyset$  (neprázdna množina) je podmnožinou  $G$ .  $F$  je **podgrupou** grupy  $G$  ak

a) Pre všetky  $a, b \in F$  platí:  $ab \in F$  ( $F$  je uzavretá na násobenie)

b) Pre všetky  $a \in F$  platí:  $a^{-1} \in F$

**Dôsledok 14.**

Množina  $H_1$  jednotkových quaterniónov je **podgrupou** grupy  $\mathring{H}$ .

**Dôkaz**

Nech  $q, q' \in H_1$ . Z dôsledku 13 vyplýva, že  $\|qq'\| = 1$ , to znamená, že  $qq' \in H_1$ , a teda prvá požiadavka z definície 13 (definícia podgrupy) je splnená. Zo vzťahu (18) v dôsledku 9 a z dôsledku 13 vyplýva, že

$$\|q^{-1}\| = \|q^*\| = \|q\| = 1 \quad (29)$$

a tým je splnená druhá požiadavka z definície 13 (definícia podgrupy) že  $q^{-1} \in H_1$ .

**3.3.5 Exponenciálna a logaritmická funkcia**

Neskôr bude potrebná verzia exponenciálnej a logaritmickej funkcie, ktoré sú definované v obore reálnych čísel, pre quaternióny. Definície a niektoré dôsledky sú tu uvedené (pre podrobnosti pozri [Pervin & Webb, 1992]).

**Definícia 14.**

Nech  $q \in H_1$ , kde  $q = [\cos \alpha, \sin \alpha]$  ako je to v dôsledku 12. Logaritmická funkcia  $\log$  je definovaná takto:

$$\log q \equiv [0, \alpha \mathbf{v}] \quad (30)$$

**Je nutné si zapamätat', že  $\log[1, (0, 0, 0)] = [0, (0, 0, 0)]$  tak ako to platí pre logaritmickú funkciu v obore reálnych čísel. Je taktiež dôležité, že  $\log q$  nie je vo všeobecnosti jednotkový quaternión.**

**Definícia 15.**

Pre quaternión v tvare  $q \equiv [0, \alpha \mathbf{v}]$ ,  $\alpha \in \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$ ,  $|\mathbf{v}| = 1$ , je exponenciálna funkcia  $\exp$  definovaná takto:

$$\exp q \equiv [\cos \alpha, \sin \alpha \mathbf{v}] \quad (31)$$

**Je dôležité, že exponenciálne a logaritmické funkcie sú vzájomne inverzné a taktiež to, že funkcia  $\exp$  sa mapuje do  $H_1$ .**

**Definícia 16.**

Nech  $q \in H_1$ ,  $t \in \mathbf{R}$ . Umocnenie  $q^t$  je definované takto:

$$q^t \equiv \exp(t \log q) \quad (32)$$

**Dôsledok 15.**

Nech  $q \in H_1$ ,  $t \in \mathbf{R}$ . Potom

$$\log(q^t) = t \log q. \quad (33)$$

**Dôkaz**

$$\log(q^t) = \log(\exp(t \log q)) = t \log q \quad (34)$$

**Dôsledok 16.**

Nech  $q \in H_1$ ,  $q = [\cos \alpha, \sin \alpha \mathbf{v}]$  a  $a, b \in \mathbf{R}$ . Potom

$$q^a q^b = q^{a+b} \quad (35)$$

**Dôkaz**

$$\begin{aligned} q^a q^b &= \exp(a \log q) \exp(b \log q) \\ &= \exp(a[0, \alpha \mathbf{v}]) \exp(b[0, \alpha \mathbf{v}]) \\ &= [\cos a\alpha, \mathbf{v} \sin a\alpha][\cos b\alpha, \mathbf{v} \sin b\alpha] \\ &= [\cos a\alpha \cos b\alpha - \sin a\alpha \sin b\alpha(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}), \\ &\quad \mathbf{v} \cos a\alpha \sin b\alpha + \mathbf{v} \cos b\alpha \sin a\alpha + (\mathbf{v} \times \mathbf{v}) \sin a\alpha \sin b\alpha] \\ &= [\cos a\alpha \cos b\alpha - \sin a\alpha \sin b\alpha, \mathbf{v}(\cos a\alpha \sin b\alpha + \cos b\alpha \sin a\alpha)] \\ &= [\cos((a+b)\alpha), \sin((a+b)\alpha)\mathbf{v}] \\ &= \exp([0, (a+b)\alpha \mathbf{v}]) \\ &= \exp((a+b) \log(q)) \\ &= q^{a+b} \end{aligned} \quad (36)$$

**Dôsledok 17.**

Nech  $p \in H_1$  a nech  $a, b \in \mathbf{R}$ . Potom platí  $(p^a)^b = p^{ab}$ .

**Dôkaz**

$$(p^a)^b = (\exp(a \log p))^b = \exp(b \log(\exp(a \log p))) = \exp(ba \log p) = p^{ab} \quad (37)$$

Je potrebná opatrnosť pri používaní vzťahov pre funkcie  $\exp$  a  $\log$  z oboru reálnych čísel pri výpočtoch s quaterniónami. Pretože, napríklad, môže vzniknúť nesprávnym odvodením (pri použití vzťahov pre exponenciálnu a logaritmickú funkciu z oboru reálnych čísel) vzťah, kde  $p$  a  $q$  sú jednotkové quaternióny:

$$\begin{aligned} pq &= \exp(\log(pq)) = \exp(\log(p) + \log(q)) = \exp(\log(q) + \log(p)) \\ &= \exp(\log(q)) \exp(\log(p)) = qp \end{aligned} \quad (38)$$

Toto odvodenie je v rozpore s faktom, že násobenie quaterniónov nie je komutatívne. Chyba sa nachádza v druhom kroku, kde je použité pravidlo  $(\log pq = \log p + \log q)$ , ktoré neplatí pre quaternióny.

### 3.3.6 Otáčanie pomocou quaterniónov

Sir Hamilton hľadal popis rotácií v priestore podobný tomu, ktorý vytvárajú komplexné čísla tým, že popisujú rotácie v rovine. To, že quaternióny v skutočnosti vykonávajú rotáciu, vyplýva z nasledujúcich dôsledkov.

#### Dôsledok 18.

Nech  $p \in H$ ,  $p = [s, (x, y, z)] = [s, \mathbf{v}]$  a nech  $q \in \overset{\circ}{H}$ . Ak  $r \in R \setminus \{0\}$  potom

$$(rq)p(rq)^{-1} = qpq^{-1}. \quad (39)$$

#### Dôkaz

Nech  $r \in R \setminus \{0\}$ . Inverzia (opačný) k  $rq$  je  $q^{-1}r^{-1}$ . Pretože násobenie skalárom je komutatívne, je možné napísať:

$$(rq)p(rq)^{-1} = rqpq^{-1}r^{-1} = qpq^{-1}rr^{-1} = qpq^{-1}. \quad (40)$$

Teda  $qpq^{-1}$  sa nezmení, ak  $q$  je násobený nenulovým skalárom.

V nasledujúcich dôsledkoch budú brané do úvahy len jednotkové quaternióny, pretože výsledky prezentované pre  $H_1$  je možné zovšeobecniť pre všetky quaternióny v  $\overset{\circ}{H}$  pomocou dôsledku 18.

#### Dôsledok 19.

Nech  $q \in H_1$ ,  $p = [s, \mathbf{v}] \in H$ . Potom  $qpq^{-1} = p'$ , kde  $p' = [s, \mathbf{v}']$  a  $|\mathbf{v}| = |\mathbf{v}'|$ .

#### Dôkaz

Bude požitý zápis  $S(q)$  pre zápis skalárnej časti quaternióna  $q$ . Dôkaz pozostáva z troch častí. V prvej bude dokázaná platnosť  $S(p) = S(p')$  pre  $p \in \{[s, \mathbf{0}] \mid s \in R\}$  a potom pre  $p \in \{[0, \mathbf{v}] \mid \mathbf{v} \in R^3\}$ . Potom budú tieto výsledky použité pre dôkaz pre  $p \in H$ .

Ak je  $p$  skalár reprezentovaný quaterniónom, potom z toho logicky vyplýva, že  $S(p') = S(p)$ . Nech  $p = [s, \mathbf{0}]$ , potom

$$qpq^{-1} = q[s, \mathbf{0}]q^{-1} = [s, \mathbf{0}]qq^{-1} = [s, \mathbf{0}] \quad (41)$$

Bol použitý dôsledok 6 o násobení skalárom (násobenie skalárom je komutatívne).

Teraz bude ukázané, že ten istý výsledok platí aj pre vektor  $\mathbf{v}$  reprezentovaný quaterniónom  $[0, \mathbf{v}]$ . Skalárnu časť  $S(q)$  quaternióna  $q$  je možné vypočítať pomocou vzťahu  $2S(q) = q + q^*$ . Potom pre quaternión so skalárnou časťou obsahujúcou nulu platí:

$$\begin{aligned} 2S(qpq^{-1}) &= (qpq^{-1}) + (qpq^{-1})^* \\ &= (qpq^*) + (qpq^*)^* \\ &= qpq^* + qp^*q^* && \text{(dôsledky 5 a 8)} \\ &= q(p + p^*)q^* && \text{(dôsledok 5)} \\ &= q(2S(p))q^* \\ &= 2S(p) && \text{(predchádzajúci výsledok)} \\ &= 0 && \text{(pretože } p = [0, \mathbf{v}]) \end{aligned} \quad (42)$$

Teraz nech  $p \in H$ ,  $p = [s, \mathbf{v}] = [s, \mathbf{0}] + [0, \mathbf{v}]$ .

$$\begin{aligned} qpq^{-1} &= q([s, \mathbf{0}] + [0, \mathbf{v}])q^{-1} \\ &= q[s, \mathbf{0}]q^{-1} + q[0, \mathbf{v}]q^{-1} && \text{(dôsledok 5)} \\ &= [s, \mathbf{0}] + [0, \mathbf{v}'] && \text{(dva predchádzajúce výsledky)} \\ &= [s, \mathbf{v}'] \end{aligned} \quad (43)$$

A dohromady  $S(p) = S(p')$ . Pretože  $q \in H_1$ , z dôsledku 9, vzťahu (19) vyplýva, že  $\|p'\| = \|qp'q^{-1}\| = \|q\| \|p\| \|q^{-1}\| = \|p\|$ . Pretože  $s$  sa nezmenilo, musí platiť aj prípad  $|\mathbf{v}| = |\mathbf{v}'|$ .

### Poznámka 3.

Nech  $q \in H_1$ ,  $p = [a, b\mathbf{v}] \in H$ , kde  $a, b \in \mathbf{R}$  a  $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$ . Ak  $q[a, \mathbf{v}]q^* = [a, \mathbf{v}']$ , potom  $q[a, b\mathbf{v}]q^* = [a, b\mathbf{v}']$ .

(44)

### Dôkaz

$$\begin{aligned} qpq^* &= q[a, b\mathbf{v}]q^* \\ &= qb\left[\frac{a}{b}, \mathbf{v}\right]q^* \\ &= b\left[\frac{a}{b}, \mathbf{v}'\right] \quad (\text{dôsledok 19}) \\ &= [a, b\mathbf{v}'] \end{aligned}$$

(45)

### Dôsledok 20.

Nech  $q, p \in H_1$ ,  $p = [\cos \alpha, \sin \alpha \mathbf{v}]$ ,  $t \in \mathbf{R}$ . Potom

$$qp^t q^* = (qpq^*)^t. \quad (46)$$

### Dôkaz

Z poznámky 3 vyplýva existencia vektora  $\mathbf{v}' \in \mathbf{R}^3$  takého, že  $q[\cos \alpha, \sin \alpha \mathbf{v}]q^* = [\cos \alpha, \sin \alpha \mathbf{v}']$ . Potom

$$\begin{aligned} qp^t q^* &= q(\exp(t \log p))q^* \quad (\text{definícia 14}) \\ &= q(\exp(t[0, \alpha \mathbf{v}]))q^* \\ &= q(\exp[0, t\alpha \mathbf{v}])q^* \\ &= q([\cos t\alpha, \sin t\alpha \mathbf{v}])q^* \quad (\text{definícia 15}) \\ &= [\cos t\alpha, \sin t\alpha \mathbf{v}'] \quad (\text{poznámka 3}) \\ &= \exp(t[0, \alpha \mathbf{v}']) \\ &= \exp(t \log [\cos \alpha, \sin \alpha \mathbf{v}']) \\ &= \exp(t \log (qpq^*)) \\ &= (qpq^*)^t \end{aligned}$$

(47)

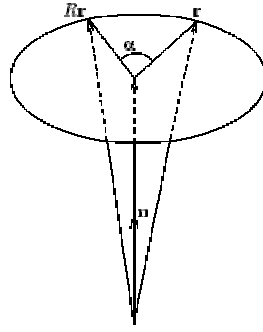
### Dôsledok 21.

Nech  $q \in H_1$ ,  $q = [\cos \alpha, \sin \alpha \mathbf{n}]$ . Nech  $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$  a  $p = [0, \mathbf{r}] \in H$ . Potom  $p^t = qpq^{-1}$  je  $p$  otočený o uhol  $2\alpha$  okolo osi  $\mathbf{n}$ .

### Dôkaz

Najprv bude ukázané, ako sa otáča vektor  $\mathbf{r}$  o uhol  $\alpha$  okolo osi  $\mathbf{n}$  a to použitím funkcií sínus, kosínus, skalárnych a vektorových produktov (produktov skalárneho a vektorového násobenia). Potom bude dokázané, že ten istý výsledok je tiež možné získať použitím quaterniónov.

Predpokladajme teda, že vektor  $\mathbf{r}$  je otočený o uhol  $\alpha$  na  $R\mathbf{r}$  okolo osi danej jednotkovým vektorom  $\mathbf{n}$  (pozri obrázok 3.1).



Obrázok 3.1

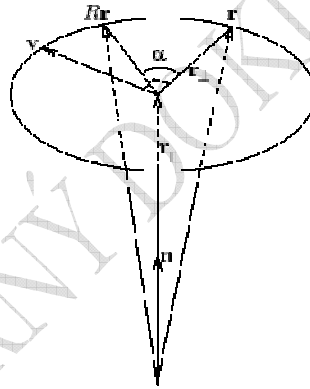
Vektor  $\mathbf{r}$  je možné zapísať ako súčet (vektorový) dvoch komponentov,  $\mathbf{r}_{\parallel}$  a  $\mathbf{r}_{\perp}$ , kde  $\mathbf{r}_{\parallel}$  je projekcia  $\mathbf{r}$  na  $\mathbf{n}$  a  $\mathbf{r}_{\perp}$  je ortogonálny (kolmý) ku  $\mathbf{n}$  (pozri obrázok 3.2). Potom

$$\mathbf{r}_{\parallel} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \quad (48)$$

$$\mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{\parallel} = \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$$

Aby bolo možné vidieť ako rotácia ovplyvňuje vektor  $\mathbf{r}$ , je potrebné umiestniť dvoj-rozmerný súradnicový systém do roviny, ktorá je ortogonálna k  $\mathbf{n}$  a obsahuje body stanovené pomocou  $\mathbf{r}$  a  $R\mathbf{r}$ . Preto je potrebný vektor  $\mathbf{v}$ , ktorý je ortogonálny k  $\mathbf{r}_{\perp}$  aj k  $\mathbf{n}$ :

$$\mathbf{v} = \mathbf{n} \times \mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{n} \times (\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}) = \mathbf{n} \times \mathbf{r} - \mathbf{n} \times (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = \mathbf{n} \times \mathbf{r} - \bar{\mathbf{0}} = \mathbf{n} \times \mathbf{r} \quad (49)$$



Obrázok 3.2

Z obrázka 3.2 je zrejmé, že komponent  $R\mathbf{r}$  ortogonálny k  $\mathbf{n}$ , označený  $(R\mathbf{r})_{\perp}$ , je daný

$$(R\mathbf{r})_{\perp} = \mathbf{r}_{\perp} \cos \alpha + \mathbf{v} \sin \alpha. \quad (50)$$

Potom:

$$\begin{aligned} R\mathbf{r} &= (R\mathbf{r})_{\parallel} + (R\mathbf{r})_{\perp} \\ &= \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp} \cos \alpha + \mathbf{v} \sin \alpha \\ &= (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + (\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}) \cos \alpha + \mathbf{v} \sin \alpha \\ &= (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \cos \alpha + \mathbf{r} \cos \alpha + \mathbf{v} \sin \alpha \\ &= (1 - \cos \alpha)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + \mathbf{r} \cos \alpha + (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \sin \alpha \end{aligned} \quad (51)$$

Teraz sa na tento problém použijú quaternióny a výsledky sa porovnajú. Mal by sa dosiahnuť výsledok vzťahu (51).

Predpokladmi sú vzťahy  $R_q(p) = qpq^{-1}$ ,  $p = [0, \mathbf{r}]$  a to, že  $q$  je jednotkový quaternión  $q = [s, \mathbf{v}]$ :

$$\begin{aligned}
R_q(p) &= [s, \mathbf{v}][0, \mathbf{r}][s, \mathbf{v}]^{-1} \\
&= [s, \mathbf{v}][0, \mathbf{r}][s, -\mathbf{v}] \\
&= [s, \mathbf{v}][\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}, s\mathbf{r} - \mathbf{r} \times \mathbf{v}] \\
&= [s(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{v} \cdot (s\mathbf{r} - \mathbf{r} \times \mathbf{v}), s(s\mathbf{r} - \mathbf{r} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{v} + \mathbf{v} \times (s\mathbf{r} - \mathbf{r} \times \mathbf{v})] \\
&= [0, s^2\mathbf{r} - s(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{v} + \mathbf{v} \times (s\mathbf{r}) - \mathbf{v} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v})] \\
&= [0, s^2\mathbf{r} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{v} - \mathbf{v} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) - 2s(\mathbf{r} \times \mathbf{v})] \\
&= [0, s^2\mathbf{r} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{v} + 2s(\mathbf{r} \times \mathbf{v})] \quad (*) \\
&= [0, (s^2 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v})\mathbf{r} + 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{v} + 2s(\mathbf{v} \times \mathbf{r})] \\
\end{aligned} \tag{52}$$

(\*) - použitá identita  $\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) = (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3)\mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)\mathbf{v}_3$

Pretože  $q$  je jednotkový quaternión, je možný zápis  $q = [\cos \alpha, (\sin \alpha)\mathbf{n}]$ , kde  $|\mathbf{n}| = 1$  (vyplýva to z dôsledku 12).

Substitúciou do vzťahu pre  $R_q(p)$  potom:

$$\begin{aligned}
R_q(p) &= [0, (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})\mathbf{r} + 2((\sin \alpha)\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})(\sin \alpha)\mathbf{n} \\
&\quad + 2\cos \alpha((\sin \alpha)\mathbf{n} \times \mathbf{r})] \\
&= [0, (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)\mathbf{r} + (2\mathbf{n} \sin^2 \alpha)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) \\
&\quad + 2\cos \alpha \sin \alpha(\mathbf{n} \times \mathbf{r})] \\
&= [0, \mathbf{r} \cos 2\alpha + (1 - \cos 2\alpha)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n} + (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \sin 2\alpha] \\
\end{aligned} \tag{53}$$

Z predchádzajúceho odvodenie je zrejmé, že výsledkom je ten istý vektor ako vo vzťahu (51). Pričom odlišnosť je iba v tom, že v predchádzajúcom odvození sa vyskytuje uhol  $2\alpha$  namiesto  $\alpha$ . Teda, ak je daný jednotkový vektor  $\mathbf{n}$  a uhol  $\alpha$ , potom jednotkový quaternión  $[\cos \alpha, \sin \alpha \mathbf{n}]$  otáča vektor  $\mathbf{r}$  o uhol  $2\alpha$  okolo  $\mathbf{n}$ .

#### Poznámka 4.

*Lubovoľná všeobecná troj-rozmerná rotácia o uhol  $\alpha$  okolo osi  $\mathbf{n}$  môže byť vykonaná jednotkovým quaterniónom.*

#### Dôkaz

V predchádzajúcom dôsledku (dôsledok 21) stačí zvoliť  $q = [\cos \frac{\alpha}{2}, \sin \frac{\alpha}{2} \mathbf{n}]$ . Potom je možné získať požadovanú rotáciu.

#### Dôsledok 22.

*Nech  $q_1, q_2 \in H_1$ . Rotácia pomocou  $q_1$  nasledovaná rotáciou pomocou  $q_2$  je ekvivalentná rotácii pomocou  $q_1 q_2$ .*

#### Dôkaz

Dané  $p \in H$ . Výsledok priamo vyplýva zo vzťahu:

$$\begin{aligned}
q_2(q_1 p q_1^{-1})q_2^{-1} &= (q_2 q_1) p (q_1^{-1} q_2^{-1}) \\
&= (q_2 q_1) p (q_1^* q_2^*) \quad (\text{dôsledok 13}) \\
&= (q_2 q_1) p (q_2 q_1)^* \quad (\text{dôsledok 8}) \\
&= (q_2 q_1) p (q_2 q_1)^{-1} \quad (\text{dôsledok 13}) \\
\end{aligned} \tag{54}$$



### 3.3.7 Intuícia v geometrii

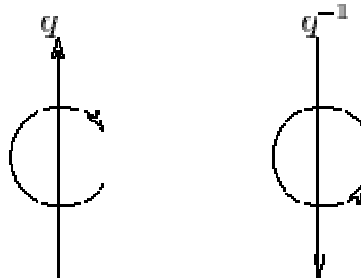
V tejto kapitole budú prezentované zaujímavé pozorovania, ktoré majú za úlohu pomôcť pri pochopení rotácií pomocou quaterniónov.

#### Quaternióny $q$ a $q^{-1}$

Nech  $q = [s, \mathbf{v}] \in H_1$ . Potom

$$[s, \mathbf{v}]^{-1} = q^{-1} = q^* = [s, -\mathbf{v}] \quad (55)$$

Je vhodné brať do úvahy geometrickú interpretáciu: Opačný (inverzný) quaternión  $q^{-1}$  ku quaterniónu  $q$ , reprezentuje rotáciu o taký istý uhol (rovnaká veľkosť uhla), ale os je v opačnom smere (pozri obrázok 3.3).

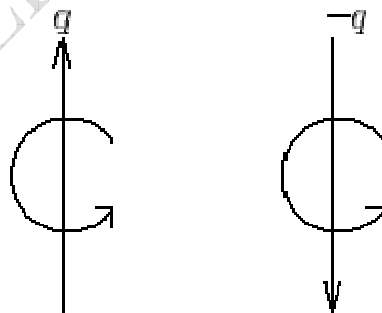


Obrázok 3.3

Otočením osi sa otočil aj smer rotácie. Ak nasleduje rotácia pomocou  $q^{-1}$  po rotácii pomocou  $q$ , potom rotácia pomocou  $q^{-1}$  zruší účinok rotácie pomocou  $q$ .

#### Quaternióny $q$ a $-q$

Quaternión  $-q$  reprezentuje presne tú istú rotáciu ako quaternión  $q$  (vyplýva to z dôsledku 6) (pozri obrázok 3.4). Môže to byť prekvapujúce, ale je to správne. Pretože otočenie o uhol  $\alpha$  okolo osi  $\mathbf{n}$  sa môže tiež vyjadriť ako otočenie o uhol  $-\alpha$  okolo osi  $-\mathbf{n}$ . Je to teda len estetický výsledok, že boli nájdené obe rotácie na guľi tvorenej jednotkovými quaterniónmi. Takú istú dualitu je možné nájsť v Eulerovom teoreme.



Obrázok 3.4

#### Ostatné quaternióny (všetky okrem jednotkových quaterniónov)

Ako vyplýva z dôsledku 18, všetky quaternióny na priamke  $rq$ ,  $r \in \mathbf{R}$ ,  $r \neq 0$  reprezentujú tú istú rotáciu ( $q$  je jednotkový quaternión – všetky jeho násobky reprezentujú tú istú rotáciu).

### 3.3.8 Quaternióny a diferenciálny počet

Táto kapitola popisuje množstvo všeobecných výsledkov z diferenciálneho počtu pre funkcie, ktoré sa mapujú na množinu  $H$ . Výsledky budú neskôr použité ako dôkaz, že isté interpolačné krivky sú diferencovateľné.

**Dôsledok 23.**

Nech  $q = [\cos \alpha, \sin \alpha \mathbf{v}] \in H_1$ ,  $t \in \mathbf{R}$ . Potom

$$\frac{d}{dt} q^t = q^t \log(q) \quad (56)$$

**Dôkaz**

Dôkaz výrazu je pre obe strany (pravú aj ľavú) zvlášť.

Ľavá strana:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} q^t &= \frac{d}{dt} \exp(t \log(q)) = \frac{d}{dt} \exp(t[0, \alpha \mathbf{v}]) \\ &= \frac{d}{dt} [\cos(t\alpha), \sin(t\alpha) \mathbf{v}] = \alpha [-\sin(t\alpha), \cos(t\alpha) \mathbf{v}] \end{aligned} \quad (57)$$

Pravá strana:

$$\begin{aligned} q^t \log(q) &= \exp(t \log(q)) \log(q) \\ &= [\cos(t\alpha), \sin(t\alpha) \mathbf{v}] [0, \alpha \mathbf{v}] \\ &= [-\alpha \sin(t\alpha) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}), \alpha \cos(t\alpha) \mathbf{v} + \alpha \sin(t\alpha) (\mathbf{v} \times \mathbf{v})] \\ &= [-\alpha \sin(t\alpha), \alpha \cos(t\alpha) \mathbf{v}] \\ &= \alpha [-\sin(t\alpha), \cos(t\alpha) \mathbf{v}] \end{aligned} \quad (58)$$

Bude ukázané tiež pravidlo spájania a produkčné pravidlo pre quaternióny. Najprv sa uvedie produkčné pravidlo. Dôvodom tohto odvodenia je zaručiť, že poradie quaterniónov v diferencovaných výrazoch je správne. Je dôležité preveriť, že je to tak, pretože násobenie quaterniónov nie je komutatívne.

**Dôsledok 24. (Produkčné pravidlo)**

Nech  $f, g \in C^1(\mathbf{R}, H)$ . Potom

$$\frac{d}{dt} (f(t)g(t)) = \left( \frac{d}{dt} f(t) \right) g(t) + f(t) \left( \frac{d}{dt} g(t) \right) \quad (59)$$

**Dôkaz**

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (f(t)g(t)) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(x+\delta)g(x+\delta) - f(x)g(x)}{\delta} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(x+\delta)g(x+\delta) - f(x+\delta)g(x) + f(x+\delta)g(x) - f(x)g(x)}{\delta} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left( f(x+\delta) \frac{g(x+\delta) - g(x)}{\delta} + \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} g(x) \right) \\ &= f(x)g'(x) + f'(x)g(x) \end{aligned} \quad (60)$$

**Dôsledok 25. (Pravidlo spájania)**

Nech  $f \in C^1(H, H)$ ,  $g \in C^1(\mathbf{R}, H)$ . Potom

$$\frac{d}{dt} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \quad (61)$$

**Dôkaz**

Výpočet derivácie v ľubovoľnom bode  $c \in \mathbf{R}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(g(x)) &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(g(x)) - f(g(c))}{x - c} \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{(f(g(x)) - f(g(c))) (g(x) - g(c))^{-1} (g(x) - g(c))}{x - c} \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \left( \frac{f(g(x)) - f(g(c))}{g(x) - g(c)} \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \right) \\ &= f'(g(c))g'(c) \end{aligned} \quad (62)$$

A nakoniec nasledujúci vzťah, ktorý nemá náprotivok (taký istý) v obore reálnych čísel.

**Dôsledok 26.**

Nech  $q \in C^1(\mathbf{R}, H_1)$ ,  $r \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ . Pretože  $q$  mapuje na  $H_1$ ,  $q(t)$  je možné zapísať ako  $[\cos \alpha(t), \mathbf{v}(t) \sin \alpha(t)]$  a potom

$$\frac{d}{dt} q(t)^{r(t)} = \begin{bmatrix} -\sin(r(t)\alpha(t))(r'(t)\alpha(t) + r(t)\alpha'(t)), \\ \cos(r(t)\alpha(t))(r'(t)\alpha(t) + r(t)\alpha'(t))\mathbf{v}(t) + \sin(r(t)\alpha(t))\mathbf{v}'(t) \end{bmatrix} \quad (63)$$

**Dôkaz**

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} q(t)^{r(t)} &= \frac{d}{dt} \exp(r(t) \log(q(t))) \\ &= \frac{d}{dt} \exp(r(t)[0, \mathbf{v}(t)\alpha(t)]) \\ &= \frac{d}{dt} \exp[0, r(t)\mathbf{v}(t)\alpha(t)] \\ &= \frac{d}{dt} [\cos(r(t)\alpha(t)), \sin(r(t)\alpha(t))\mathbf{v}(t)] \\ &= \begin{bmatrix} -\sin(r(t)\alpha(t))(r'(t)\alpha(t) + r(t)\alpha'(t)), \\ \cos(r(t)\alpha(t))(r'(t)\alpha(t) + r(t)\alpha'(t))\mathbf{v}(t) + \sin(r(t)\alpha(t))\mathbf{v}'(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (64)$$

Pre porovnanie, výraz pre deriváciu dvoch funkcií reálnych hodnôt  $u, v \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ :

$$\frac{d}{dt} u^v = v u^{v-1} \frac{d}{dt} u + u^v \log(u) \frac{d}{dt} v. \quad (65)$$

Je nepravdepodobné, že tento vzťah, ktorý je odlišný od vzťahu uvedenom v dôsledku 26, platí všeobecne aj pre quaternióny.

**3.4 Zhrnutie**

Táto kapitola obsahuje krátky súhrn algebraických vlastností jednotlivých metód otáčania. Predpokladá sa určitá znalosť matematických zákonov a pravidiel, preto ich použitie nie je detailne popísané.

Priestor troj-rozmerných rotácií nie je jednoduchý vektorový priestor ale uzavreté troj-rozmerné **potrubie** a tiež **ne-Abelovská grupa** (pozri kapitolu 3.3.3) označovaná v literatúre ako  $SO(3)$  [Sho, 1994b]. Kde  $S$  je skratka od slova „special“ (špeciálny) a  $O(3)$  pochádza z definície:  $O(n) = \{n \times n \text{ matice} \mid O^t O = I\}$  - množina ortonormálnych matic  $n \times n$ .

Množina jednotkových quaterniónov tvorí **podgrupu** grupy quaterniónov (pozri kapitolu 3.3.4. V niektorej literatúre sa  $H_1$  označuje tiež ako  $S^3$  [Sho, 1985]. Táto podgrupa tvorí **hypersféru** (nadguľu) v priestore quaterniónov. Sférická (guľovitá) metrika pre  $S^3$  je ekvivalentná angulárnej (uhlovej) metrike pre  $SO(3)$  [Sho, 1985].

Okrem toho, grupa rotácií môže byť mapovaná do štvor-rozmernej jednotkovej gule tvorenej jednotkovými quaterniónmi. Táto projekcia je typu **dva-k-jednej** (pozri kapitolu 3.3.7): Pre každú rotáciu existujú dva navzájom korešpondujúce jednotkové quaternióny a to  $q$ , ktorý je možné získať priamo, a  $-q$  tzv. **antipodálny** (protinožec) jednotkový quaternión (pozri [Sho, 1994b] a [Fol, 1990]). Je to tak pretože  $SO(3)$  má takú istú topológiu ako troj-rozmerná projekcia priestoru označovaného  $(\mathbf{R}P^3)$ . Lenže množina jednotkových quaterniónov vytvára hypersféru ( $S^3$ ) a to vytvára odlišnosť voči topológii  $\mathbf{R}P^3$ .

Pomer týchto spoločných črt a a malej nezhody v úmysle (úmysel sira Hamiltona), je možné vidieť, že výsledkom vývinu hladkej interpolácie medzi jednotkovými quaterniónami je hladká interpolácia medzi všeobecnými rotáciami. Problém nie je triviálny, pretože  $H_1$  tvorí **ne-Euklidovský priestor**, ktorý vylučuje zvyčajné metódy interpolácie ako sú spline. Úlohou je nájsť ekvivalentnú interpolačnú krivku na povrchu štvor-rozmernej jednotkovej gule.

## 4. Porovnanie quaterniónov, Eulerových uhlov a matíc

V predchádzajúcej kapitole boli predstavené dve metódy otáčania:

- Rotácie definované Eulerovými uhlami a reprezentované všeobecnými transformačnými maticami.
- Rotácie definované Eulerovým teorémom a reprezentované quaterniónmi.

V tejto kapitole budú popísané výhody a nevýhody rozličných metód.

### 4.1 Eulerove uhly/matice – nevýhody

Tradične sa používajú homogénne matice pre reprezentáciu Eulerových uhlov, pretože tieto základné matice pre rotácie okolo osí  $x$ ,  $y$  a  $z$  sú jednoduché a dobre známe. Tento históriou podložený výber má predsa len niekoľko nevýhod.

#### a) Potreba intuície

Popísanie všeobecnej rotácie ako rotácií okolo troch základných osí nie je pre animátora prirodzené. Ak, napríklad, animátor chce otočiť objekt o uhol  $30^\circ$  okolo osi otočenia danej vektorom  $(1, 1, 1)$ , je veľmi zdĺhavé odvádzať odpovedajúce Eulerove uhly pre rozklad rotácie na rotácie okolo troch základných osí.

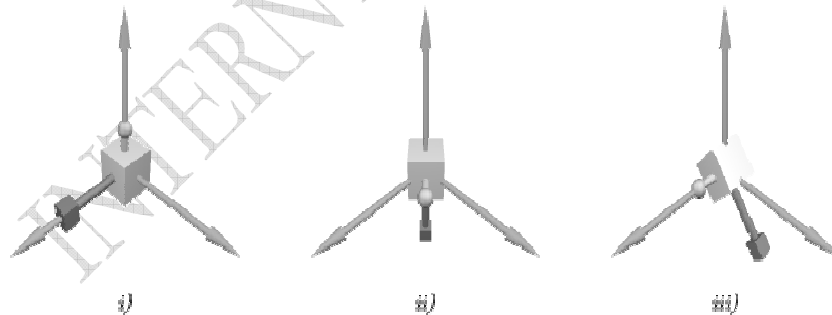
#### b) Je dôležité poradie rotácií

Poživateľ grafického systému musí vyjadriť rotácie s rešpektom na isté konvencie, ktoré definujú v akom poradí budú tri základné rotácie vykonané. Rozličné konvencie vytvárajú rozličné výsledky. Napríklad, otočenie  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, 0\right)$  vytvára odlišné orientácie, ktoré závisia na tom, ktorá konvencia, či  $x, y, z$  alebo  $y, x, z$ , je použitá.

Ako príklad je použitý objekt v strede súradnicového systému (pozri obrázok 4.1). Otočením objektu na obrázku

4.1.i o uhol  $\frac{\pi}{2}$  okolo osi  $x$  a potom o uhol  $\frac{\pi}{4}$  okolo osi  $y$  vznikne výsledok, ktorý je na obrázku 4.1.ii.

Ak je namiesto toho použitá konvencia  $y, x, z$ , rotácia sa vykoná najprv o uhol  $\frac{\pi}{4}$  okolo osi  $y$  a potom o uhol  $\frac{\pi}{2}$  okolo osi  $x$  a výsledok je na obrázku 4.1.iii.

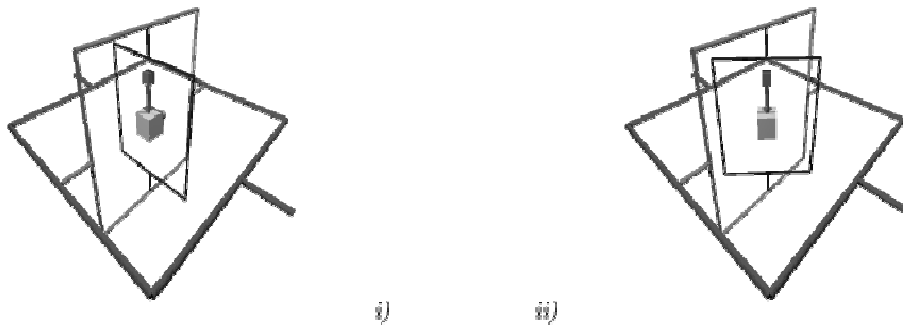


Obrázok 4.1

#### c) Gimbal lock (strata stupňa voľnosti)

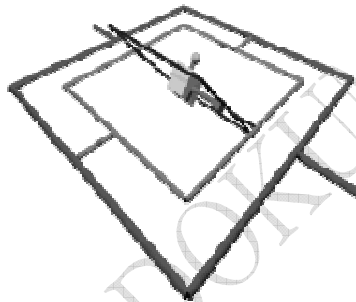
Získanie intuitívneho pochopenia ako pracujú matice rotácií je veľmi ťažké. Presnejšie, je ťažké predvídať ako sa postupné rotácie okolo základných osí navzájom ovplyvnia. Vzhľadom k tomu, že maticová reprezentácia Eulerových uhlov má prirodzenú jedinečnosť v parametrizácii, stáva sa to ešte ťažším. Je možné vytvoriť takú postupnosť rotácií, že vo výslednej rotácii sa stratí jeden stupeň voľnosti. Táto situácia sa nazýva ***gimbal lock*** (strata stupňa voľnosti).

Gimbal lock je pojem prevzatý z leteckého a vesmírneho priemyslu, kde sa používajú gyroskopy (vytvárajú umelý horizont). Gyroskop v podstate pozostáva z troch sústredných štvorcov alebo kruhov (pozri obrázok 4.2).



Obrázok 4.2

Na obrázku 4.2.i vnútorný štvorec reprezentuje os  $x$ , prostredný štvorec os  $y$  a vonkajší štvorec os  $z$ . Rotácia okolo osi  $x$  môže vyzerat' ako ukazuje obrázok 4.2.ii, kde je znázornený objekt otočený o uhol  $45^\circ$  okolo osi  $x$ . Ak potom bude tento objekt otočený o uhol  $90^\circ$  okolo osi  $y$ , získa sa situácia zobrazená na obrázku 4.3. V takejto situácii potom sa javí otočenie okolo osi  $x$  alebo okolo osi  $z$  ako otočenie okolo tej istej osi (typický príklad straty stupňa voľnosti).



Obrázok 4.3

Matematicky gimbal lock odpovedá strate stupňa voľnosti vo všeobecnej matici rotácie:

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \gamma & \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \cos \gamma \sin \beta + \sin \alpha \sin \gamma & 0 \\ \cos \beta \sin \gamma & \cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \cos \gamma \sin \alpha & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta \sin \alpha & \cos \alpha \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (66)$$

Ak teraz  $\beta = \frac{\pi}{2}$ , potom otočenie pomocou uhla  $\alpha$  má ten istý efekt ako uskutočnenie tej istej rotácie pomocou uhla  $-\gamma$ . Je to viditeľné z nasledujúceho odvodenia (sú použité súčtové vzorce pre funkcie **cos** a **sin**):

$$\begin{aligned} R\left(\alpha, \frac{\pi}{2}, \gamma\right) &= \begin{pmatrix} 0 & \cos \gamma \sin \alpha - \cos \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & 0 \\ 0 & \cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \sin \gamma - \cos \gamma \sin \alpha & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \sin(\alpha - \gamma) & \cos(\alpha - \gamma) & 0 \\ 0 & \cos(\alpha - \gamma) & \sin(\alpha - \gamma) & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (67)$$

Zo vzťahu (67) je zrejmé, že otočenie závisí iba na rozdiel uhlov  $(\alpha - \gamma)$  a preto má iba jeden stupeň voľnosti namiesto dvoch. Pre  $\beta = \frac{\pi}{2}$  zmeny veľkostí uhlov  $\alpha$  a  $\gamma$  sa do výsledku premietnu ako rotácie okolo tej istej osi.

#### d) **Obtiažna implementácia interpolácií**

Bežne sa súradnice každej zo základných osí interpolujú nezávisle. A tak sú vzájomné závislosti medzi osami ignorované. Ale napríklad, ak je použitá jednoduchá lineárna interpolácia, tak jej výsledkom sú nečakané efekty toho, že tieto závislosti nie sú ignorované (pozri [DIK, 1998]).

#### e) **Viacznačná zhoda rotácií**

Ak je daná matica rotácií, potom je obtiažne vyriešiť problém nájdenia inverznej matice: Aké boli pôvodné rotácie okolo základných osí? Vo všeobecnosti neexistuje jednoznačné riešenie tohto problému (pozri kapitolu 6).

Okrem toho, jedna rotácia môže byť reprezentovaná množstvom odlišných matíc rotácií. A nakoniec, mapovanie medzi rotáciami a maticami rotácií nie je ani injektívne ani surjektívne.

#### f) **Výsledok zloženia (rotácií) nie je jasný**

Podľa Eulerovho teorému môžu byť dve postupné (za sebou nasledujúce) rotácie vyjadrené ako jedna rotácia. Pre Eulerove uhly, musia byť zostavené dve matice rotácií a vynásobené aby sa získala výsledná rotácia. Určenie tejto rotácie je zdĺhavé a vo všeobecnosti nevrátne (nie je možné spätné otočenie – opačná rotácia).

#### g) **Reprezentácia je redundantná**

Homogénne matice obsahujú postrádateľné (nepotrebné) informácie. Ak sú tieto matice použité výlučne pre reprezentáciu rotácií, obsahujú nuly na niektorých miestach (nuly na miestach  $(4, i)$  a  $(i, 4)$  pre  $i \in \{1, 2, 3\}$ ). Okrem toho, matica používa 9 miest (nie sú na nich nuly) pre 4 stupne voľnosti, ktoré sú potrebné pre popis rotácie podľa Eulerovho teorému.

Avšak pretože matica rotácií musí byť ortonormálna existuje 6 obmedzení (každý riadok musí byť jednotkovým vektorom a stĺpce musia byť vzájomne ortogonálne), ktoré musia byť zachovávané počas výpočtov.

## 4.2 Eulerove uhly/matice – výhody

Výhodou implementácie pomocou matíc je to, že jednotlivé matematické vzťahy sú dobre známe a aplikácie matíc sa dajú relatívne ľahko implementovať pomocou štandardných programových balíkov. Avšak tieto výhody sú viac historického charakteru než racionálne zistené úvahy.

Hlavnou výhodou je schopnosť homogénnych matíc reprezentovať všetky ostatné základné transformácie (posunutie, zmena mierky, projekcia a skosenie).

## 4.3 Quaternióny – nevýhody

### a) **Quaternióny reprezentujú iba rotáciu**

Je možné implementovať posunutie použitím quaterniónov (sčítanie quaterniónov môže byť použité ako zmena posunutia interpretujú vektorovú časť quaternióna ako vektor posunutia). V [Maillot, 1990] je definovaný druh homogénnych quaterniónov s násobením, ktoré vytvára multiplikatívne posunutie a otočenie.

Napriek tomu je možné definovať homogénny quaternión a tým zahrnúť kompozíciu posunutí. Ale toto rozšírenie nie je také elegantné ako homogénne matice. Homogénne rozšírenie quaterniónov je v literatúre ignorované. Quaternióny sú výlučne používané na rotáciu a matice sú používané na všetky ostatné transformácie.

### b) **Vzťahy popisujúce quaternióny vyzerajú komplikovane**

Quaternióny nie sú zahrnuté v štandardných študijných osnovách modernej matematiky a počítačovej grafiky. Snáď niekoľko poznatkov o grupe quaterniónov je v algebre, ale aj tak poznatky o quaterniónoch nie sú vo všeobecnosti rozsiahle. Preto si quaternióny vyžadujú na začiatku trochu námahy pri naštudovaní si základných vzťahov. Avšak, quaternióny nepredstavujú problém pre toho, kto dokáže pochopiť algebru matíc.

## 4.4 Quaternióny – výhody

### a) **Zreteľná geometrická interpretácia**

Quaternióny vyjadrujú otočenie ako uhol otočenia okolo osi otočenia. Toto je omnoho prirodzenejší spôsob vnímania (vyjadrenia) rotácie než pomocou Eulerových uhlov.

Zreteľná korešpondencia medzi Eulerovým teorémom a rotáciami reprezentovanými quaterniónami napomáha intuitívnemu pochopeniu quaterniónov. Mapovanie medzi rotáciami a quaterniónami je preto jednoznačné s jedinou výnimkou, že každá rotácia môže byť reprezentovaná dvoma quaterniónami. To sa javí ako slabina v reprezentácii pomocou quaterniónov. To, že  $q$  a  $-q$  odpovedajú tej istej rotácii však na druhej strane vzbudzuje radosť

matematikom. Pretože samotné rotácie vystupujú v dvojiciach. Ak je daná rotácia, potom je možné získať tú istú rotáciu otočením v opačnom smere okolo opačnej osi (pozri kapitolu 3.3.7).

b) **Nezávislosť od súradnicového systému**

Rotácia pomocou quaterniónov nie je ovplyvnená výberom súradnicového systému. Používateľ grafického systému sa nepotrebuje trápiť so spoľahlivými konvenciami (dohodami) poradia rotácií okolo základných osí.

c) **Jednoduché metódy interpolácie**

Quaternióny umožňujú elegantné formulácie množstva interpolačných metód. Dosiahnutie hladkej interpolácie je preto jednoduchšie použitím quaterniónov než použitím Eulerových uhlov. Bude o tom pojednané v kapitole **Chyba! Nenašiel sa žiaden zdroj odkazov..**

d) **Kompaktná reprezentácia**

Reprezentácia rotácií pomocou quaterniónov je kompaktná v tom zmysle, že je štvor-rozmerná a preto ako jediná obsahuje požadované štyri stupne voľnosti podľa Eulerovho teorému.

Podľa teórie quaterniónov, všetky nenulové quaternióny môžu byť použité pre reprezentáciu rotácie (pozri dôsledok 18). V praktických aplikáciách sa používajú iba jednotkové quaternióny. Takže iba jediná podmienka (obmedzenie na jednotkový quaternión) musí byť počas výpočtu splnená namiesto šiestich podmienok pri použití matic rotácií.

e) **Nestráca sa stupeň voľnosti (gimbal lock)**

Pretože gimbal lock je vlastný maticovej reprezentácii Eulerových uhlov, tento problém sa neobjavuje v reprezentácii pomocou quaterniónov.

f) **Jednoduchá kompozícia rotácií**

Použitím quaterniónov je možné rotácie pohodlne skladať. Zloženie odpovedá násobeniu quaterniónov. Rotácia pomocou quaterniónu  $q_1$  nasledovaná rotáciou pomocou quaterniónu  $q_2$  sa dosiahne rotáciou pomocou quaterniónu  $q_2q_1$ .

## 4.5 Zhrnutie

Boli uvedené rozličné výhody a nevýhody pre dve metódy otáčania. Eulerove uhly reprezentované maticami vedú k viacerým problémom. Rotácia musí byť vyjadrená ako uhly otočenia okolo troch explicitných osí a pritom poradie ich vykonávania (jednotlivých otočení) je veľmi dôležité. Je možné „prísť o jeden stupeň voľnosti“ (t.j. matica sa zablokuje) a nakoniec je problematické udržať matematické podmienky v konzistencii počas výpočtov.

Reprezentácia pomocou quaterniónov je kompaktná s omnoho prirodzenejšou geometrickou interpretáciou a parametrizáciou rotácie, ktorá je nezávislá na súradnicovom systéme.

Jedinou skutočnou výhodou maticovej reprezentácie je možnosť reprezentovať všetky ostatné transformácie.

V súčte, quaternióny sa ponúkajú ako najlepšia voľba pre reprezentáciu rotácií.

## 4.6 Iné metódy otáčania

V predchádzajúcich kapitolách bolo popísané, že najpriateľnejšou reprezentáciou rotácií je reprezentácia pomocou quaterniónov. Avšak táto reprezentácia bola porovnávaná len s jednou metódou. A to s metódou rotácií založených na Eulerových uhloch a reprezentovanou maticami rotácií.

Samozrejme, je možné pripustiť aj iné metódy rotácií. Napríklad, už známe metódy možno kombinovať navzájom. Je možné definovať maticu rotácií založenú na Eulerovom teoréme (pozri [Fol, 1990]). Tým sa odstránia problémy spojené s Eulerovými uhlami a dosiahne sa lepšia korešpondencia medzi maticami rotácií a množinou rotácií. Ale aj tak zostávajú problémy s touto metódou. Napríklad, inverzné mapovanie z matic rotácií na rotácie je stále nejednoznačné. A ďalej, maticová reprezentácia nie je veľmi vyhovujúca pre interpolačné algoritmy. A v neposlednom rade, pri použití matic rotácií je stále nutné zachovávať podmienky definované pre ortonormálne matice.

V tomto učebnom texte neboli rozvíjané myšlienky iných metód otáčania, než tých, ktoré boli predstavené. Je to spôsobené tým, že predstavené metódy sú najdôležitejšie z pohľadu počítačovej grafiky. Eulerove uhly a matice sú najbežnejšou metódou otáčania spomínanou v literatúre a používanou v reálnych aplikáciách počítačovej grafiky. Avšak quaternióny majú svoje nepopierateľné výhody.

## 5. Možnosti implementácie quaternionov

Mnohé grafické systémy a systémy virtuálnej reality zvlášť sa už v dnešnej dobe nezaobídu bez tzv. dynamických (pohybujúcich sa) objektov. Túto dynamiku zabezpečujú vo väčšine geometrické transformácie nad týmito objektmi. A ako už z predchádzajúcich kapitol je zrejmé, hlavnou oblasťou implementácie quaternionov budú rotácie objektov. Avšak pre túto implementáciu je potrebné mať možnosť prístupu k súradniciam vrcholov resp. iných bodov objektov, ktoré sú dynamické (je potrebné ich otočiť). Súčasný grafický systém OpenGL a DirectX však túto možnosť neposkytujú. Preto je potrebné zabezpečiť to inou formou. Ak sa napríklad grafický systém, či už OpenGL alebo DirectX, používa iba na zobrazovanie, to znamená, že všetky ostatné problémy resp. algoritmy sú implementované „ručne“ programátorom, potom nie je problém dostať sa k potrebným údajom.

### a) Klasický prístup

Vo všeobecnosti je možné implementovať quaterniony ako údajovú štruktúru:

```
typedef struct
{
    long double r;
    long double i;
    long double j;
    long double k;
}Quaternion;
```

Pričom jednotlivé položky tejto údajovej štruktúry reprezentujú jednotlivé súradnice quaterniona a neodlišuje sa pritom vektorová časť od skalárnej časti.

### b) Objektový prístup

V súčasnosti sa stáva veľmi populárnym objektovo-orientovaný prístup k implementácii rôznych problémov na číselných počítačoch. V duchu tejto metodiky je možné zdefinovať si vlastnú triedu *Quaternion* napríklad takto:

```
class Quaternion
{
public:
    double w, x, y, z;

    // konštrukcia a deštrukcia
    Quaternion () {}
    Quaternion (double _w, double _x, double _y, double _z);
    Quaternion (const Quaternion& q);

    // konverzie medzi quaternionami, maticami a Eulerovými uhlami
    void FromRotationMatrix (const double R[3][3]);
    void ToRotationMatrix (double R[3][3]) const;
    void FromAngleAxis (const double& angle, const double& ax,
        const double& ay, const double& az);
    void ToAngleAxis (const double& rdAngle, const Point3& rkPoint);
    void ToAngleAxis (double& angle, double& ax, double& ay, double& az) const;
    void ToAngleAxis (double& rkAngle, Point3& rkPoint) const;

    // aritmetické operácie
    Quaternion& operator= (const Quaternion& q);
    Quaternion operator+ (const Quaternion& q) const;
    Quaternion operator- (const Quaternion& q) const;
    Quaternion operator* (const Quaternion& q) const;
    Quaternion operator* (double c) const;
    friend Quaternion operator* (double c, const Quaternion& q);
    Quaternion operator- () const;

    // základné vzťahy potrebné pre výpočty obsahujúce quaterniony
    double Dot (const Quaternion& q) const; // skalárny súčin quaternionov
    double Norm () const; // norma quaterniona
    Quaternion Inverse () const; // inverzný quaternion
    Quaternion UnitInverse () const; // jednotkový quaternion
    Quaternion Exp () const;
    Quaternion Log () const;

    // otočenie bodu pomocou quaternionov
    Point3 operator* (const Point3& pt) const;
```



```

// sférická lineárna interpolácia
static Quaternion Slerp (double t, const Quaternion& p,
    const Quaternion& q);

static Quaternion SlerpExtraSpins (double t, const Quaternion& p,
    const Quaternion& q, int iExtraSpins);

// nastavenie parametrov pre sférickú kvadratickú interpoláciu
static void Intermediate (const Quaternion& q0, const Quaternion& q1,
    const Quaternion& q2, Quaternion& a, Quaternion& b);

// vlastná sférická kvadratická interpolácia
static Quaternion Squad (double t, const Quaternion& p,
    const Quaternion& a, const Quaternion& b, const Quaternion& q);

static Quaternion ZERO; // nulový quaternión
static Quaternion IDENTITY;
};

```

### 5.1.1 Rotácie objektov

Rotácie objektov reprezentované quaterniónmi sú jednou z možností aplikácie quaterniónov v praxi. Je však potrebné objasniť niektoré aspekty tejto implementácie.

Aj keď sa na prvý pohľad môžu zdať vzťahy popisujúce quaternióny ako zložité, po dôkladnom pochopení ich vlastností a zákonitostí sa následná implementácia stáva jednoduchou. Pre dôkladnú implementáciu rotácií pomocou quaterniónov je potrebné implementovať niekoľko vzťahov, ktoré sú potrebné pre správnu funkciu celej implementácie rotácií. Aj keď rotáciu bodu pomocou quaterniónov popisuje len jediný vzťah (dôsledok 20), je potrebné implementovať aj ďalšie vzťahy (výpočet inverzného quaterniónu, normy quaterniónu a násobenie quaterniónov).

#### 5.1.1.1 Násobenie quaterniónov

Pre implementáciu násobenia quaterniónov je použitá maticová reprezentácia vzťahu popísanom v dôsledku 4.

$$\begin{aligned}
 qq' &\equiv [s, \mathbf{v}][s', \mathbf{v}'] \\
 &\equiv (s + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z)(s' + \mathbf{i}x' + \mathbf{j}y' + \mathbf{k}z') \\
 &= ss' - (xx' + yy' + zz') + \mathbf{i}(sx' + s'x + yz' - zy') + \\
 &\quad \mathbf{j}(sy' + s'y + zx' - xz') + \mathbf{k}(sz' + s'z + xy' - yx') \\
 &\equiv [ss' - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}', \mathbf{v} \times \mathbf{v}' + s\mathbf{v}' + s'\mathbf{v}]
 \end{aligned} \tag{68}$$

Implementácia môže vyzeráť takto:

##### a) Klasický prístup

Vstupom funkcie **Qmult** sú dva quaternióny a výstupom výsledok ich vynásobenia (tiež quaternión).

```

Quaternion Qmult(Quaternion a, Quaternion b)
{
    Quaternion c;

    c.r = a.r*b.r - a.i*b.i - a.j*b.j - a.k*b.k;
    c.i = a.r*b.i + a.i*b.r + a.j*b.k - a.k*b.j;
    c.j = a.r*b.j + a.j*b.r + a.k*b.i - a.i*b.k;
    c.k = a.r*b.k + a.k*b.r + a.i*b.j - a.j*b.i;

    return(c);
}

```

##### b) Objektový prístup

Vytvorenie konštruktora „\*“ (pri použití - vykonanie násobenia quaterniónov):

```
Quaternion Quaternion::operator* (const Quaternion& q) const
```

```

{
    return Quaternion
    (
        w*q.w-x*q.x-y*q.y-z*q.z,
        w*q.x+x*q.w+y*q.z-z*q.y,
        w*q.y+y*q.w+z*q.x-x*q.z,
        w*q.z+z*q.w+x*q.y-y*q.x
    );
}

```

### 5.1.1.2 Inverzný quaternión

Pre výpočet inverzného quaternióna je použitý vzťah (ak je daný quaternión  $q = [s, \mathbf{v}]$ ):

$$q^{-1} = [s, (-1)\mathbf{v}] \quad (69)$$

#### a) Klasický prístup

Funkcia **Qinv** má na vstupe quaternión  $a$  a na výstupe inverzný quaternión  $a^{-1}$ .

```

Quaternion Qinv(Quaternion a)
{
    Quaternion b;

    b.r = a.r;
    b.i = (-1)*a.i;
    b.j = (-1)*a.j;
    b.k = (-1)*a.k;

    return(b);
}

```

#### b) Objektový prístup

```

Quaternion Quaternion::Inverse () const
{
    double norm = w*w+x*x+y*y+z*z;
    if ( norm > 0.0 )
    {
        norm = 1.0/norm;
        return Quaternion(w*norm, -x*norm, -y*norm, -z*norm);
    }
    else
    {
        // vráti chybu
        return ZERO;
    }
}

```

Táto funkcia vráti inverzný quaternión a už aj jednotkový quaternión aj keď na vstupe nebol jednotkový. Pretože pre výpočet otočenia sú potrebné jednotkové quaternióny (ich norma má hodnotu jedna). Quaternión sa stane jednotkovým po aplikácii vzťahu:

$$q = \frac{q}{\|q\|} \quad (70)$$

### 5.1.1.3 Norma quaterniónu

Pre výpočet normy quaterniónu je potrebné implementovať vzťah:

$$\|q\| = \sqrt{s^2 + x^2 + y^2 + z^2} \quad (71)$$

#### a) Klasický prístup

Funkcia **Qrenorm** má na vstupe neunitový quaternión a na výstupe odpovedajúci jednotkový quaternión:

```

Quaternion Qrenorm(Quaternion a)
{

```

```

Quaternion b;
long double ver;

ver=(a.r*a.r)+(a.i*a.i)+(a.j*a.j)+(a.k*a.k);
ver=1/sqrt(ver);

b.r=a.r*ver;
b.i=a.i*ver;
b.j=a.j*ver;
b.k=a.k*ver;

return(b);
}

```

Táto funkcia vytvára zo všeobecného quaterniónu jednotkový (obsahuje v sebe aj implementáciu vzťahu pre výpočet normy quaterniónu).

#### b) Objektový prístup

Funkcia popísaná v kapitole 5.1.1.2 obsahuje v sebe implementáciu vzťahu pre výpočet normy quaterniónu.

### 5.1.1.4 Jednotkový quaternión

Pre implementáciu rotácií je potrebné implementovať aj vzťah podľa ktorého je možné ľubovoľný quaternión previesť na jednotkový. Tento prevod sa uskutočňuje vzťahom:

$$q = \frac{q}{\|q\|} \quad (72)$$

#### a) Klasický prístup

Klasický prístup je popísaný v kapitole 5.1.1.3, kde je navrhnutá funkcia, ktorá prevádza ľubovoľný quaternión na jednotkový.

#### b) Objektový prístup

Objektový prístup je popísaný v kapitole 5.1.1.2, kde je navrhnutá funkcia vo vnútri ktorej sa ľubovoľný quaternión prevádza na jednotkový.

### 5.1.1.5 Vlastná rotácia

Pre implementáciu rotácie reprezentovanú quaterniónmi je potrebné implementovať vzťah:

$$p_{\text{otočený}} = qp_{\text{pôvodný}}q^{-1} \quad (73)$$

V tomto vzťahu je dvakrát použitý vzťah pre násobenie quaterniónov. Aby sa z bodu  $P$  stal quaternión, je potrebné „pridať“ ďalšiu súradnicu. Jeho pôvodné súradnice potom tvoria vektorovú časť quaternióna a reálna časť je rovná nule. Číže výsledný quaternión potom vyzerá takto:

$$p = [0, (P_x, P_y, P_z)] \quad (74)$$

Pri implementácii rotácie je sú použité funkcie pre násobenie quaterniónov.

## 5.1.2 Animácia (pohyb) objektov

Animácia ako taká je súčasťou každého grafického systému, ktorý používa dynamické objekty. Pre animáciu pomocou quaterniónov sa používajú interpolačné metódy, ktoré majú vplyv na hladkosť, rýchlosť a kvalitu prechodu z jednej pozície do druhej. Podrobnejší rozbor týchto metód aj s demonštračnými príkladmi sa nachádza v [DIK, 1998].

Pre implementáciu nasledujúcich funkcií reprezentujúcich jednotlivé metódy interpolácie sú potrebné ďalšie funkcie, ktoré sú použité vo vnútri nasledujúcich funkcií.

## 6. Konverzie medzi metódami reprezentácie rotácií

### 6.1 Prevod Eulerových uhlov na matice

Rotácia okolo osi  $x$  pomocou uhla  $\alpha$  nasledovaná rotáciou okolo osi  $y$  pomocou uhla  $\beta$  ukončená rotáciou okolo osi  $z$  pomocou uhla  $\gamma$  je zapísaná v maticovom zápise (sú použité homogénne matice rozmeru  $4 \times 4$ ) takto:

$$\begin{aligned}
 R(\alpha, \beta, \gamma) &= R_x(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma) \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \cos \gamma \sin \beta + \sin \alpha \sin \gamma & 0 \\ \cos \beta \sin \gamma & \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & -(\cos \gamma \sin \alpha) + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta \sin \alpha & \cos \alpha \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{75}$$

### 6.2 Prevod matíc na Eulerove uhly

Matica rotácií, ktorá vznikla pri prevode Eulerových uhlov na matice je štartovacím bodom pre konverziu matíc na Eulerove uhly. Konverzia na Eulerove uhly si vyžaduje inverznú trigonometrickú funkciu. Ani funkcia  $\arccos$  ani funkcia  $\arcsin$  nedávajú hodnoty na celom intervale od  $-\pi$  do  $\pi$ . Je teda potrebné zaviesť hodnoty pre funkciu  $\sin$  aj pre funkciu  $\cos$  pre všetky uhly. Použitím hodnôt oboch funkcií  $\cos$  aj  $\sin$  budú pôvodné uhly uhly  $z$  intervalu  $]-\pi, \pi]$  ak  $v = \text{sgn}(\sin v) \arccos(v)$ , kde funkcia  $\text{sgn}$  je definovaná takto:

$$\begin{aligned}
 \text{sgn}(0) &= 0 \\
 \text{sgn}(x) &= \frac{x}{|x|}
 \end{aligned} \tag{76}$$

Je možné priamo označiť  $\sin \beta$  ako  $-R_{31}$ . Izolovaním  $\cos \beta$  dostaneme nasledujúce vzťahy:

$$\begin{aligned}
 \cos^2 \beta &= (-R_{11}R_{32}R_{31} - R_{33}R_{21}) / R_{12} \\
 \cos^2 \beta &= (-R_{11}R_{33}R_{31} + R_{32}R_{21}) / R_{13} \\
 \cos^2 \beta &= (-R_{32}R_{31}R_{21} + R_{11}R_{33}) / R_{22} \\
 \cos^2 \beta &= (-R_{31}R_{33}R_{21} - R_{11}R_{32}) / R_{23}
 \end{aligned} \tag{77}$$

Z týchto vzťahov (77) však nie je zrejmé, aké znamienko má funkcia  $\cos \beta$ . To znamená, že je možné určiť uhol  $\beta$  priamo z funkcie  $\sin \beta$ . Ďalším spôsobom určenia uhla  $\beta$  je obmedziť ho na interval  $\left[ \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ , aby bolo

možné predpokladať, že funkcia  $\cos \beta$  je kladná (jej hodnota).

Určenie hodnôt funkcií  $\cos$  a  $\sin$  pre uhly  $\alpha$  a  $\gamma$  si vyžaduje určiť hodnotu funkcie  $\cos \beta$ . Ak predpoklad, že  $\cos \beta$  je kladná hodnota, neplatí, potom taktiež  $\alpha$  a  $\gamma$  sú určené nesprávne. Vzťahy pre výpočet hodnôt funkcií  $\cos$  a  $\sin$  vyzerajú takto:

$$\begin{aligned}
\beta &= \arcsin(-R_{31}) \quad (\text{Predpoklad } \beta \in \left[ \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]) \\
\cos \alpha &= \frac{R_{33}}{\cos \beta} \\
\sin \alpha &= \frac{R_{32}}{\cos \beta} \\
\cos \gamma &= \frac{R_{11}}{\cos \beta} \\
\sin \gamma &= \frac{R_{21}}{\cos \beta}
\end{aligned} \tag{78}$$

Tieto vzťahy (78) si samozrejme vyžadujú, aby  $\cos \beta \neq 0$ . Ak sa  $\cos \beta = 0$ , potom  $\beta = \pm \frac{\pi}{2}$ . Tento stav odpovedá strate stupňa voľnosti (gimbal lock, zablokovanie) a teda je nemožné odlíšiť uhol  $\alpha$  od uhla  $\gamma$ . A teda je potrebné definovať  $\gamma \equiv 0$ . V tejto situácii je možné uhly určiť takto:

$$\begin{aligned}
\beta &= \arcsin(-R_{31}) \quad (\text{Predpoklad } \beta \in \left[ \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]) \\
\cos \alpha &= R_{22} \\
\sin \alpha &= -R_{23} \\
\gamma &= 0
\end{aligned} \tag{79}$$

### 6.3 Prevod quaterniónov na matice

Rotácia vektora  $p = (x, y, z)$  quaterniónom  $q$  je daná vzťahom  $q[0, p]q^{-1}$ . Je potrebné určiť odpovedajúcu maticu, ktorá násobením zľava pomocou  $[x \ y \ z \ 1]^T$  dáva ten istý výsledok.

Produkt dvoch quaterniónov  $q_v = [w, (a, b, c)]$  a  $q_h = [s, (x, y, z)]$  (zapísaných v **i, j, k** notácii) vyzerá takto:

$$\begin{aligned}
q_v q_h &= (w + \mathbf{i}a + \mathbf{j}b + \mathbf{k}c)(s + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z) \\
&= (ws - ax - by - cz) + \mathbf{i}(as + wx - cy + bz) + \\
&\quad \mathbf{j}(bs + wy + cx - az) + \mathbf{k}(cs + wz - bx + ay)
\end{aligned} \tag{80}$$

A vzťah (80) zapísaný v maticovej reprezentácii (quaternión  $[s, (x, y, z)]$  je zapísaný ako stĺpec v tvare  $[x, y, z, s]^T$ , a znak „ $\times_q$ “ označuje násobenie quaterniónov) vyzerá takto:

$$q_v q_h = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ w \end{bmatrix} \times_q \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} wx - cy + bz + as \\ cx + wy - az + bs \\ -bx + ay + wz + cs \\ -ax - by - cz + ws \end{bmatrix} \tag{81}$$

A teraz je možné napísať matice odpovedajúce násobeniu quaterniónom zľava a sprava. Najprv bude určená matica  $V_{q_v}$  taká, že  $V_{q_v} q_h = q_v q_h$  a kde  $q_v$  a  $q_v q_h$  sú zapísané ako stĺpce:

$$V_{q_v} = \begin{bmatrix} w & -c & b & a \\ c & w & -a & b \\ -b & a & w & c \\ -a & -b & -c & w \end{bmatrix} \tag{82}$$

Teraz bude zapísaná matica  $H_{q_h}$  taká, že  $H_{q_h} = q_v q_h$ :

$$H_{q_n} = \begin{bmatrix} s & z & -y & x \\ -z & s & x & y \\ y & -x & s & z \\ -x & -y & -z & s \end{bmatrix} \quad (83)$$

Teraz je možné zapísať maticu  $M$  takú, že  $Mp = q[0, p]q^{-1}$ . Použitím  $q = [s, (x, y, z)]$  a  $q^{-1} = [s, (-x, -y, -z)]$  potom:

$$\begin{aligned} M &= V_q H_{q^{-1}} \\ &= \begin{bmatrix} s & -z & y & x \\ z & s & -x & y \\ -y & x & s & z \\ -x & -y & -z & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -z & y & -x \\ z & s & -x & -y \\ -y & x & s & -z \\ x & y & z & s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1-2(y^2+z^2) & 2xy-2sz & 2sy+2xz & 0 \\ 2xy+2sz & 1-2(y^2+z^2) & -2sx+2yz & 0 \\ -2sy+2xz & 2sx+2yz & 1-2(y^2+z^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (84)$$

## 6.4 Prevod matíc na quaternióny

Prevod matice rotácií na odpovedajúci jednotkový quaternión používa maticu  $M$  (vzťah (84)), ktorá bola vytvorená prevodom quaterniónov na maticu. Najprv sa nájde  $s$  a to takto:

$$\begin{aligned} M_{11} + M_{22} + M_{33} + M_{44} &= 4 - 4(x^2 + y^2 + z^2) \\ &= 4 - 4(1 - s^2) \quad (\text{Pretože } (s^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1)) \\ &= 4s^2 \end{aligned} \quad (85)$$

Teraz, po získaní  $s$ , je potrebné získať ostatné hodnoty:

$$\begin{aligned} s &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{M_{11} + M_{22} + M_{33} + M_{44}} \\ x &= \frac{M_{32} - M_{23}}{4s} \\ y &= \frac{M_{13} - M_{31}}{4s} \\ z &= \frac{M_{21} - M_{12}}{4s} \end{aligned} \quad (86)$$

Znamienko  $s$  sa nedá určiť. Podľa výberu znamienka  $s$  sa zmenia aj znamienka pre  $x$ ,  $y$  a  $z$ . To znamená, že sa vyberá vlastne medzi quaterniónom a jemu odpovedajúcim záporným quaterniónom. Lenže tieto quaternióny reprezentujú tú istú rotáciu, ale výberom znamienka pre  $s$  môže byť ovplyvnená interpolačná krivka.

Lenže to v praxi nepredstavuje problém, pretože celková interpolácia je vypočítaná pomocou quaterniónov. Stačí jednoducho zvoliť si ako hodnotu (znamienko) pre  $s$  a to kladný koreň odmocniny.

## 6.5 Prevody medzi quaterniónami a Eulerovými uhlami

Tieto konverzie je možné ľahko dosiahnuť prechodom cez matice použitím predchádzajúcich konverzií.

Preto zostáva obmedzenie pre uhol  $\beta$  z konverzií medzi maticami a Eulerovými uhlami aj pre konverziu z quaterniónov na Eulerove uhly. Nie je možné vyhnúť sa tomuto obmedzeniu (alebo podobnému) ani použitím priamej konverzie medzi quaterniónami a Eulerovými uhlami.

## 7. Literatúra

- [Eul, 1752] Euler, L.: Decouverte d'un nouveau principe de mécanique, Opera Omnia, 1957
- [Fol, 1990] Foley, J. – van Dam, A. – Feiner, S. – Hughes, J.: *Computer Graphics Principles and Practice*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 2<sup>nd</sup>. edition, 1990
- [Ham, 1853] Hamilton, W., R.: *Lectures on Quaternions*. Hodges Smith & Co., Dublin, 1853
- [Ham, 1899] Hamilton, W., R.: *Elements of Quaternions*, volume 1-2. Longmans, Green & Co., 1899
- [May, 1966] May, K.: *Principles of Complex Numbers*. Notetryk, 1966
- [Mai, 1990] Mailot, P.: *Using quaternions for coding 3d transformations*. Academic Press Inc., 1990
- [Sho, 1994] Shoemake, K. – Duff, T.: *Matrix animation and polar decomposition*.  
<ftp://ftp.cis.upenn.edu/pub/graphics/shoemake/polardecomp.ps.Z>, 1994
- [Sho, 1987] Shoemake, K.: *Quaternion calculus and fast animation*. SIGGRAPH Course Notes, 1987
- [Sho, 1994b] Shoemake, K.: *Quaternions*.  
<ftp://ftp.cis.upenn.edu/pub/graphics/shoemake/quatut.ps.Z>, 1994
- [Sho, 1985] Shoemake, K.: *Animating rotation with quaternion curves*. Computer Graphics, 1985
- [Wat, 1992] Watt, A. – Watt, M.: *Advanced Animation and Rendering Techniques Theory and Practice*. Addison-Wesley, Wokingham, England, 1992
- [DIK, 1998] Dam, E. B. – Koch, M. – Lillholm, M.: *Quaternions, Interpolation and Animation*. University of Copenhagen, Denmark, July 1998, <http://www.diku.dk>
- [SOB, 1995] Sobota, B. : *Počítačová grafika a jazyk C*. KOPP České Budějovice, České Budějovice, 1995

