Aritmetické operácie v rôznych číselných sústavách

KEMT-FEI-TUKE, okt. 2018

Ľ. Maceková

Plán

- Prevody medzi ČS
- Zobrazenie informácií v ČS:
- priamy kód
- inverzný kód
- doplnkový kód
- kód s posunutou nulou
- Strojová aritmetika (+, -, *, /) v binárnej číselnej sústave. Sčítanie a odčítanie v inverznom a v doplnkovom kóde.
- Pohyblivá rádová čiarka (IEEE-754) a operácie

Prevody medzi číselnými sústavami:

- desiatková → dvojková (binárna); binárna → desiatková, celé aj zlomkové čísla ... **metódy prevodu**: - postupné delenie číslom 2 ...
  - odčítanie „váh“ jednotlivých rádov počnúc najväčšou najbližšou (napr. 64; 32, 16, ...)

- desiatková → šestnástková (hexadecimálna) a opačne ...
  - metódy prevodu: postupné delenie číslom 16
    prevod najprv na $(...)_2$, potom prevod každej štvorice núl a jednotiek na $(.)_{16}$ počnúc sprava:
    $(\text{xxx xxxx xxxx})_2 \rightarrow (\text{y y y})_H$

- dvojková → kód BCD (Binary Coded Decimal):
  $(2\ 4\ 5)_{10} \rightarrow (0010\ \ 0100\ \ 0101)_{BCD}$ a opačne.
  Transformujú sa iba číslice od 0 do 9 (→ kombinácie 1010_2 a vyššie sú nevyužité!)
  $(1001\ \ 0111\ \ 0000\ \ 0001)_{BCD} \rightarrow (9701)_{10}$

- desiatková → dvojková s pohyblivou rádovou čiarkou (IEEE 754) - nájdete na konci tejto prezentácie

Sčítanie v desiatkovej sústave

583+677=???

Postup:

Napíšeme si čísla pod seba a spočítavame číslice v jednotlivých rádoch.

```
  0583
+ 0677
------
  1260
```

7+3 = 10
číslicu 0 napíšeme a 1 prechádza do vyššieho rádu

7+8+1(z predch. súčtu) = 16.
6 napíšeme, 1 prechádza ...

6+5+1 = 12
číslicu 2 napíšeme a 1 prechádza ...

0+0+1(z predch. súčtu) = 1

Sčítanie v binárnej sústave

1101+110=???

Postup:

Napíšeme si čísla pod seba, doplníme na rovnaký počet číslic a spočítavame číslice v jednotlivých rádoch.

$$
\begin{array}{r}
01101 \\
+\ 00110 \\
\hline
10011
\end{array}
$$

0+1 = 1

1+0 = 1

1+1 = 10_2
číslicu 0 napíšeme a 1 prechádza do vyššieho rádu

1+0+1(z predch. súčtu) = 10
číslicu 0 napíšeme a 1 prechádza do vyššieho rádu

0+0+1(z predch. súčtu) = 1

Skúška správnosti: $1101_2 = 13_{10}$; $110_2=6_{10}$; $13+6=19_{10}=10011_2$....sedí ✓

Odčítanie v binárnej sústave

- Odčítanie v binárnej sústave sa realizuje pripočítaním záporného čísla.

  65-37=65+(-37)
- Kladné čísla sa v binárnej sústave vyjadrujú pomocou priameho kódu (to je ten, ktorý dostaneme pri prevádzaní čísel napr. z desiatkovej do dvojkovej sústavy)
- Záporné čísla sa v binárnej sústave vyjadrujú pomocou
  - inverzného kódu
  - doplnkového kódu

Inverzný kód

Inverzný kód binárneho čísla sa vytvorí tak, že sa každá jedna číslica v binárnom čísle neguje (to znamená že z jednotiek budú nuly a z núl sa stanú jednotky), pričom musí byť vopred známy počet bitov vyhradený pre túto reprezentáciu čísel.

Napr. pre 6 bitov:

$$(-37)_{10}=(-100101)_2=(011010)_{IK}$$

pre 8 bitov ... = $(11011010)_{IK}$

Príklad
odčítanie v IK

37-65=37+(-65)=???

$(37)_{10}=(0100101)_2$

$(-65)_{10}=(-1000001)_2$

$(-1000001)_2=(0111110)_{IK}$

na 7 bitov

$$\begin{array}{r} 0100101 \\ +0111110 \\ \hline 1100011 \end{array}$$

37 < 65 → Výsledok je v inverznom kóde! → $1100011_{IK}=-0011100_2$ = -28_{10}

Skúška správnosti:

$37 - 65 = -28_{10}$ ... -11100_2

✓ sedí

43 – 22 = 43 + (-22) = 21

$(43)_{10} \rightarrow (00101011)_{IK}$

$(-22)_{10} \rightarrow (11101001)_{IK}$

$(21)_{10} \rightarrow (00010101)_{IK}$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & 1 \\
\hline
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{array}
$$

Odčítanie v inverznom kóde s reprezentáciou na 8 bitov

8 – 15 = 8 + (-15) = -7

$(8)_{10} \rightarrow (01000)_{IK}$

$(-15)_{10} \rightarrow (10000)_{IK}$

$(-7)_{10} \rightarrow (11000)_{IK}$

$$
\begin{array}{ccccc}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Odčítanie v inverznom kóde s reprezentáciou na 5 bitov

Doplnkový kód

Doplnkový kód binárneho čísla sa vytvorí tak, že sa k inverznému kódu čísla pripočíta jednotka. A zase: pri vopred dohodnutom počte bitov.

$$(-37)_{10}=(-100101)_2=(011010)_{IK}$$

$$\begin{array}{r} +000001 \\ \hline (011011)_{DK} \end{array}$$

Odčítanie v doplnkovom kóde

1. Obe čísla si upravíme na rovnaký počet bitov (pripísaním núl zľava)
2. Číslo, so záporným znamienkom prevedieme do doplnkového kódu
3. Spočítame obe čísla
4. Ak po spočítaní vznikne prenos, tak ho zanedbáme
5. Ak je výsledok kladný (teda kladné číslo bolo väčšie ako záporné), tak je výsledok v priamom kóde
6. Ak je výsledok záporný (teda kladné číslo bolo menšie ako záporné), tak je výsledok v doplnkovom kóde

Príklad: odčítanie v DK

65-37=65+(-37)=???

$(65)_{10}=(1000001)_2$

$(-37)_{10}=(-0100101)_2$

$(-0100101)_2=(1011010)_{IK}$

$= (1011011)_{DK}$

na 7 bitov

$$
\begin{array}{r}
1000001 \\
+1011011 \\
\hline
\cancel{1}0011100 \\
\hline
0011100
\end{array}
$$

Prenos zanedbáme

65 > 37 → výsledok je v priamom kóde (kladný)

Skúška správnosti:

$65 – 37 = 28_{10}$ ... 11100_2

✓ sedí

Príklad
odčítanie v DK

$37-65=37+(-65)=???$

$(37)_{10}=(0100101)_2$

$(-65)_{10}=(-1000001)_2$

$(-1000001)_2=(0111111)_{DK}$

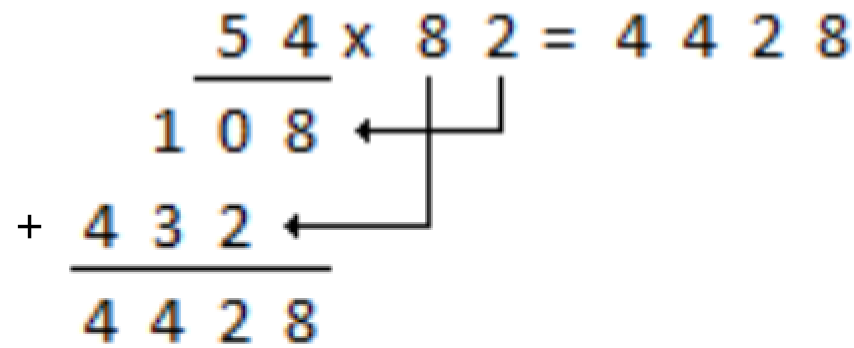
na 7 bitov

$$\begin{array}{r} 0100101 \\ +\underline{0111111} \\ 1100100 \end{array}$$

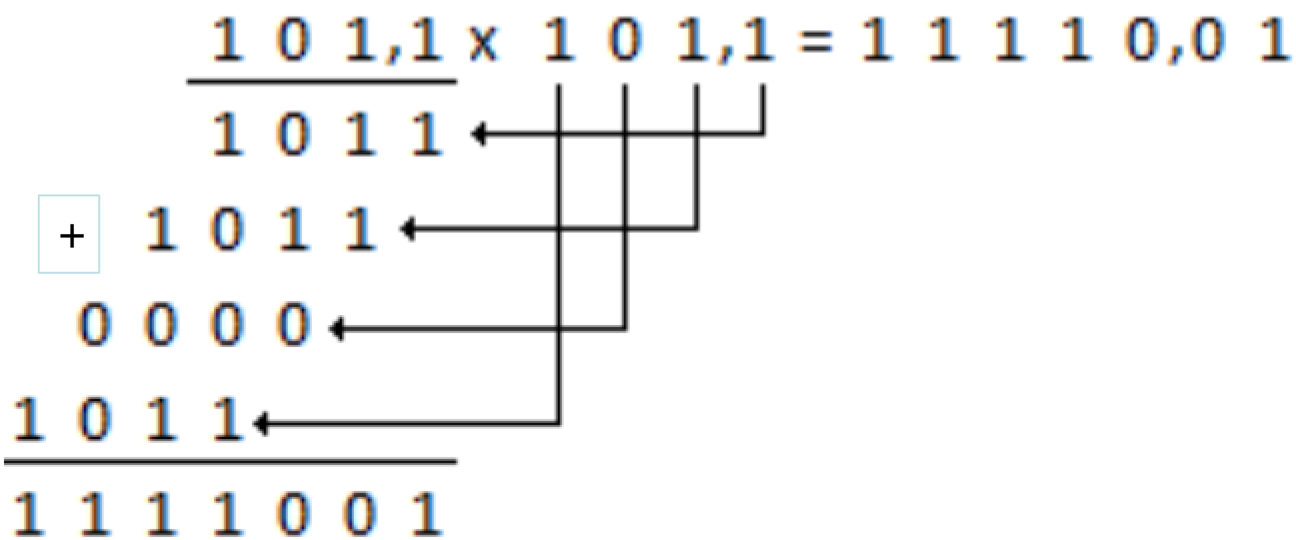
37 < 65 →
Výsledok je v doplnkovom kóde!
1100100_{DK} → 1100011_{IK} → -0011100_{10}

Skúška správnosti:
$37 – 65 = -28_{10}$ ... -11100_2
✓ sedí

Násobenie v binárnom kóde



násobenie v 10-kovej sústave



násobenie v 2-kovej sústave

Násobenie v binárnom kóde

$$
\begin{array}{r}
10011_2 \\
\cdot \quad 101_2 \\
\hline
10011_2 \\
00000_2 \\
10011_2 \\
\hline
1011111_2
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
101{,}0_2 \\
\cdot \quad 10{,}1_2 \\
\hline
1010_2 \\
0000_2 \\
1010_2 \\
\hline
1100{,}10_2
\end{array}
$$

prenos 1

Skúška správnosti: $101{,}0_2 = 5_{10}$, $10{,}1_2 = 2{,}5_{10}$; $5 \times 2{,}5 = 12{,}5_{10} = 1100{,}1_2$

Delenie v binárnom kóde

```
 1 1 6  :  8 = 1 4 , 5
 -  8 ↓
 ------
    3 6 0
 -  3 2 ↓
 ---------
      4 0
   -  4 0
   -------
      0 0
```

Delenie v sústave so základom 10

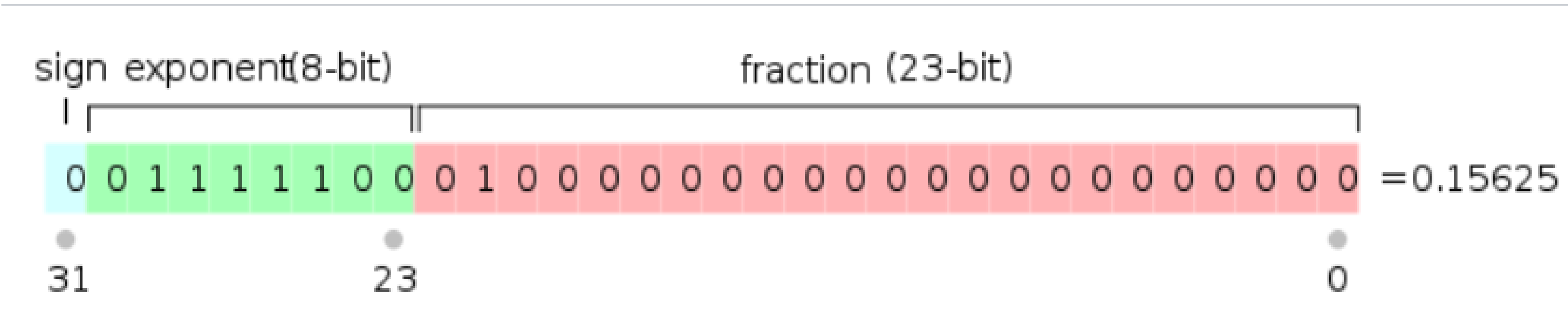
```
   1 1 0 0 1 : 1 0 1 = 1 0 1
 - 1 0 1 ↓ ↓
 -----------
       1 0 1
     - 1 0 1
     -------
       0 0 0
```

Delenie v binárnej sústave

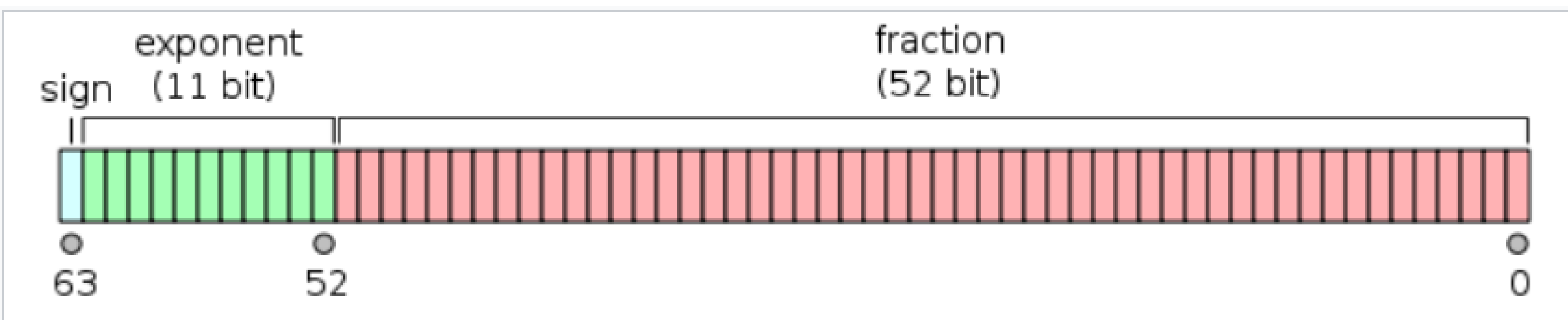
Pohyblivá rádová čiarka (IEEE-754 - Floating Point)

$(-1)^{\text{sign bit}}\ (1+\text{fraction}) \times 2^{\text{exponent - bias}}$ - hodnota čísla

Level	Width	Range at full precision	Precision[a]
Single precision	32 bits	$\pm 1.18 \times 10^{-38}$ to $\pm 3.4 \times 10^{38}$	Approximately 7 decimal digits
Double precision	64 bits	$\pm 2.23 \times 10^{-308}$ to $\pm 1.80 \times 10^{308}$	Approximately 16 decimal digits



The number 0.15625 represented as a single-precision IEEE 754-1985 floating-point number. See text for explanation.



The three fields in a 64bit IEEE 754 float

[obr. Wikipedia]

Pohyblivá rádová čiarka (IEEE-754 - Floating Point)

dek. číslo	zápis čísla v kóde IEEE_754 v **jednoduchej** presnosti (32 bitovej)		
	$(x)_{IEEE\_754}$ **... 32 bit.číslo zložené z častí:**		
	Z	**EXP**	**M**
	znamienko [1 bit]	Exponent $EXP = E + (2^P - 1)$ [8 bits]	Mantisa [23 bits]
		E ...posun doľava P...konštanta= 7 $(2^7-1)=127$... bias	významové bity vpravo od čiarky + doplnenie do 32 bitov
- 27,5	1	1000 0011	10111000000000000000000
+0,15625	0	0111 1100	01000000000000000000000

Príklad: Prevod č. -27,5.

$- 27{,}5 = (- 1\ 1011{,}1)_2 = (- 1{,}10111)_2 \times 2^4$ .... zápis s posunom čiarky o 4 miesta doľava → E = 4

IEEE754: EXP = $(4 + (2^7-1))_2$ = 100 + 111 1111 = 1000 0011

Mantisa = 1011 1000 0000 0000 0000 000

IEEE754_číslo:

Pohyblivá rádová čiarka (IEEE-754 - Floating Point)

Príklad: Prevod čísla + 0,15625 do kódu IEEE-754 s presnosťou 32 bitov

Riešenie:
$(0{,}15625)_{10} = (0{,}00101)_2 = +\,1{,}01 \times 2^{-3}$ → zápis s posunom čiarky o 3 miesta doprava, t.j. akoby o -3 doľava,
Z = 0 (kladné znamienko)
$EXP = -3 + (2^7 - 1) = (-\,11 + 111\ 1111)_2 = (0111\ 1100)_2$ (8 bitov)
Mantisa = 0100 0000 0000 0000 0000 000
→ Výsledok: číslo 0,15625 v kóde IEEE754 je
0 0111 1100 0100 0000 0000 0000 0000 000

Príklad: Spätný prevod.

IEEE_754 = 1 1000 0010 1101 0000 0000 0000 0000 000

riešenie:
Z=1 → záporné č.
$E = EXP - (2^P - 1) = 1000\ 0010 - (2^7 - 1) = 130 - 127 = 3$
$M = 1101_2$
Výsledok: $N = -\,(1{,}1101)_2 \times 2^3 = -\,1110{,}1_2 = (-14{,}5)_{10}$

Pohyblivá rádová čiarka (IEEE-754 - Floating Point)

dek. číslo	číslo v kóde IEEE_754 v **dvojitej** presnosti (double - 64 bitovej)		
	$(x)_{IEEE\_754}$ **... 64 bit.číslo zložené z častí:**		
	Z	**EXP**	**M**
	znamienko [1 bit]	Exponent $EXP=E + (2^{P}-1)$ [11 bits]	Mantisa [52 bits]
		E ...posun doľava P...konštanta= 10	významové bity vpravo od čiarky + doplnenie do 52 bitov