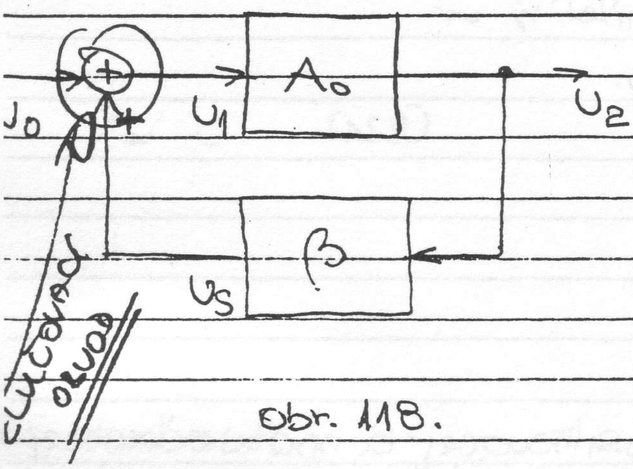
6. Spätná väzba. (5)

6.1. Základné pojmy.



obr. 118.

Pri takých dvojbránach ako sú zosilňovače, možno časť signálu z výstupu priviesť späť na vstup. Takéto privedenie signálu z výstupu sústavy (zosilňovača) na jeho vstup nazývame spätnou väzbou. Blokovú schému dvojbrány so spätnou väzbou znázorňuje obr. 118. Sústava podľa obr. 118 má dve vetvy: vetvu zosilňovaciu a vetvu spätnoväzobnú. Zosilňovacia vetva prenáša signál v priamom smere, t.j. od vstupu k výstupu. Jej prenosová funkcia je A_0. Druhou vetvou prechádza signál v obrátenom smere, t.j. od výstupu k vstupu. Jej prenosová funkcia je β a voláme ju činiteľom spätnej väzby. Obidve tieto funkcie prenosové sú definované ako pomer výstupného a vstupného napätia pri uvažovanej vetve, t.j.

$$A_0 = \frac{U_2}{U_1} \qquad \beta = \frac{U_s}{U_2} \qquad (216)$$

Vychádzajúc zo vzťahu (216), možno pre prenos sústavy so spätnou väzbou písať tieto rovnice:

$$U_0 + U_s = U_1 \qquad (217)$$

$$U_0 = U_1 - U_s \qquad (218)$$

Dosadením upravených vzťahov (216) do (218) možno obdržať tieto vzťahy:

$U_0 = U_1 - U_s =$ [redacted] $U_2(p)/A_0(p) - \beta(p)U_2(p) =$

$= (1/A_0(p) - \beta(p))\,U_2(p) = \frac{\text{[redacted]} - \beta(p)A_0(p)}{A_0(p)}\,U_2(p)$ (219)

Použitím vzťahu (219) možno pre prenos $U_2(p)/U_0(p)$ písať tento vzťah:

(93)

prenos

prenos. os. ki

$$\frac{U_2(p)}{U_0(p)} = \frac{A_0(p)}{1 - A_0(p)\beta(p)} = \frac{A_0(p)}{K(p)} \qquad (220)$$

činiteľ sp. v.

stupeň spätnej väzby.

Výraz

$$K(p) = 1 - A_0(p)\beta(p) \qquad (221)$$

sa nazýva stupňom spätnej väzby.

6.2 Základné typy spätných väzieb

So zreteľom na spôsob zapojenia zosilňovacej a spätnoväzobnej retiazky zosilňovača so spätnou väzbou, rozlišujeme tieto 2 základné dvojice typov spätných väzieb.

I. 1. Spätná väzba sériová

2. Spätná väzba paralelná

- sú to také väzby, pri ktorých v zlučovacom obvode sú zdroj signálu, výstup spätnoväzobného článku a vstup zosilňovača bez spätnej väzby zapojené zaradené v sérii alebo paralelne.

I. 1. Spätná väzba prúdová

2. Spätná väzba napäťová

- pri ktorých je spätnoväzobné napätie $U_{s/\beta}$ odvodené z prúdu záťaže, alebo z napätia záťaže.

Kombinovaním týchto typov spätných väzieb obdržíme tieto 4 základné typy spätných väzieb.

a) Sériovo-paralelná spätná väzba (napäťová spätná väzba sériová) (obr.

b) Sériová spätná väzba (prúdová spätná väzba sériová).

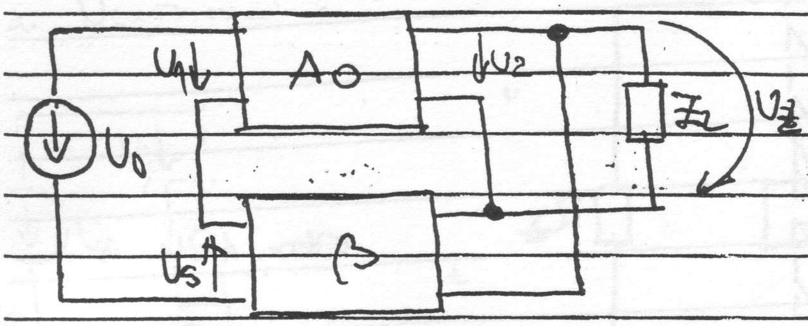
c) Paralelná spätná väzba (napäťová spätná väzba paralelná).

d) Paralelno-sériová spätná väzba (prúdová spätná väzba paralelná).

Schématické zapojenia, zodpovedajúce vyššie uvedeným 4 typom základných spätných väzieb, ako aj príklady týchto typov spätných väzieb v obvodoch s tranzistormi sú naznačené na obr. (119 – 130).

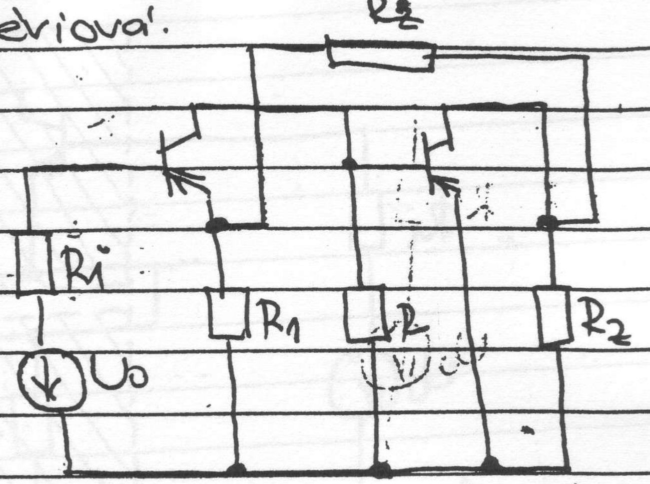
β, ρ, σ, α

a. Napäťová spätná väzba sériová.

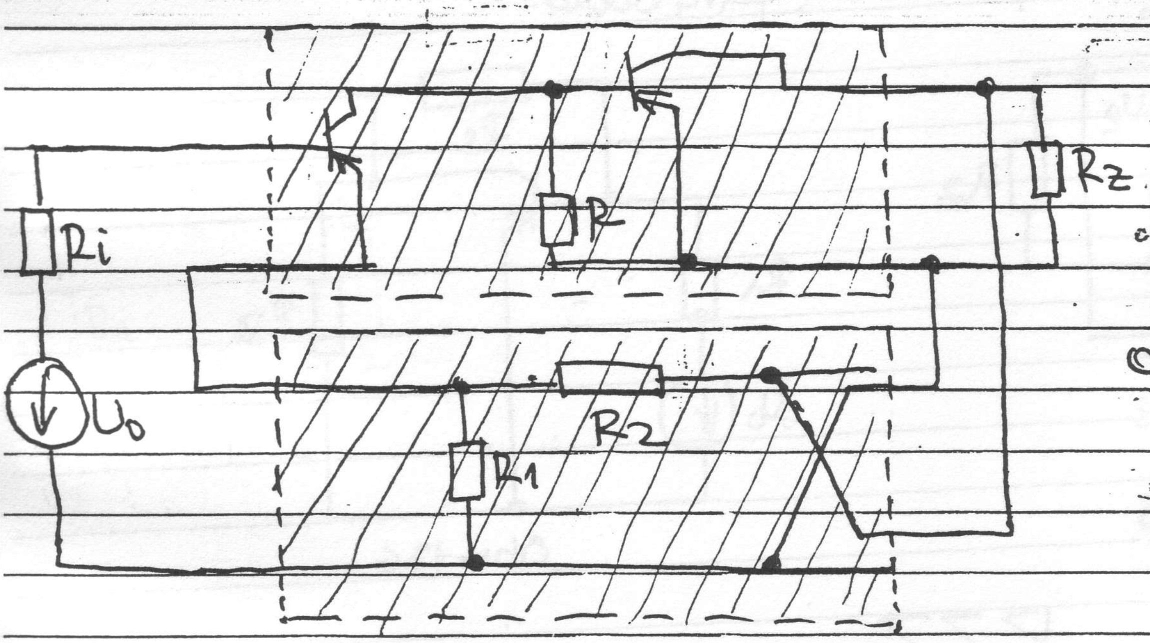


$U_1 = U_0 + U_s$ $U_s = \beta U_z$, $U_z = A_0 U_1$

Obr. 119.

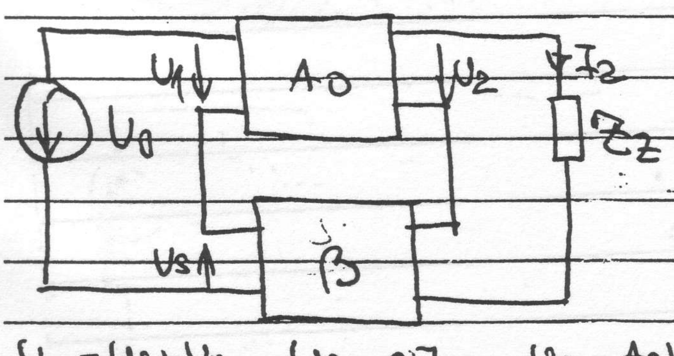


Obr. 120.



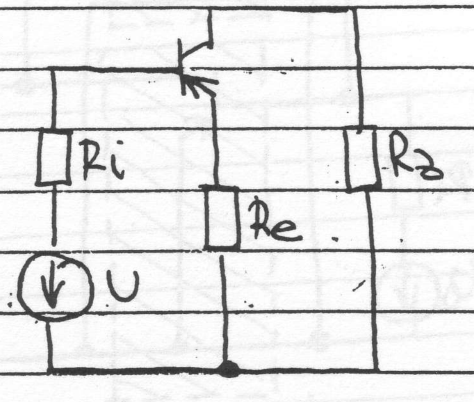
Obr. 121

b. Prúdová spätná väzba sériová.

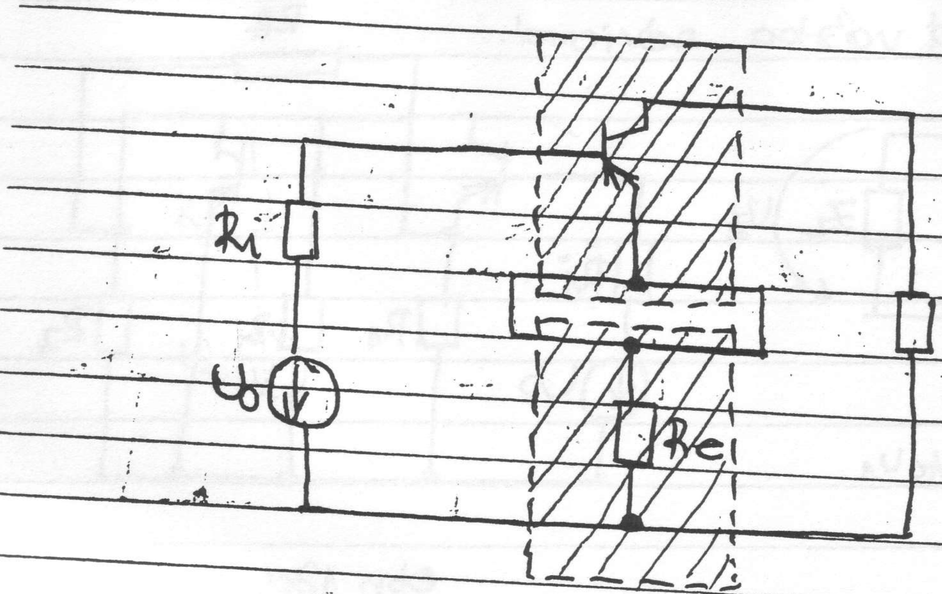


$U_1 = U_s + U_0$ $U_s = \beta I_z$, $U_2 = A_0 U_1$

Obr. 122.

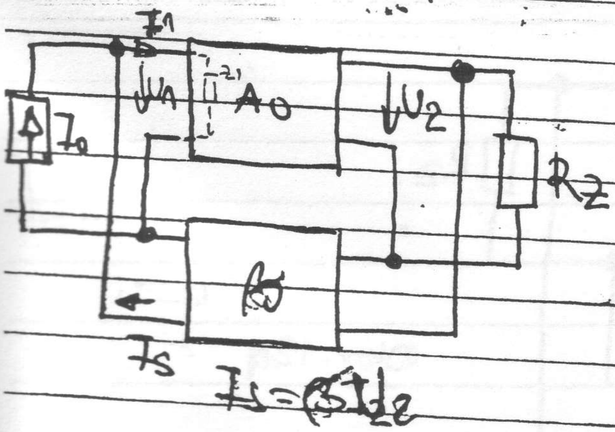


Obr. 123

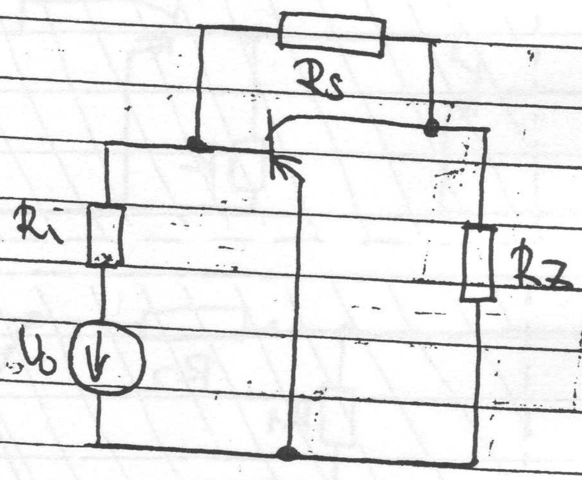


Obr. 124

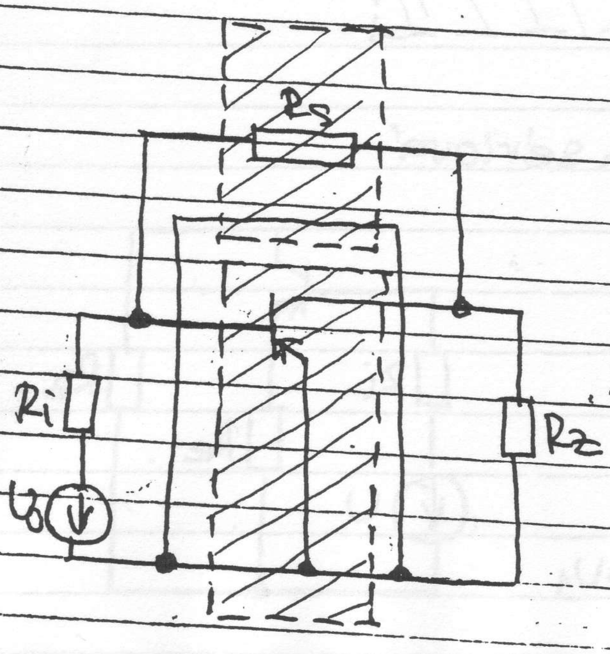
c. Napäťová spätná väzba paralelná.



Obr. 125



Obr. 126



Obr. 127

Poznámky k Obr. 119, 122, 125, 128.

Obr. 119.

$$\left.\begin{aligned} U_2 &= A_0 U_1 \\ U_S &= \beta U_2 \\ U_1 &= U_0 + U_S \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &U_1 = U_0 + U_S = U_0 + \beta U_2 = U_0 + \beta A_0 U_1 = \\ &U_1 (1 - \beta A_0) = U_0 \\ &U_1 = U_0 / (1 - \beta A_0) = U_0 / k \quad U_1 / U_0 = 1/k \end{aligned}$$

Obr. 122.

$U_2 = A_0 U_1$ $\qquad$ Z_{S1} – vstupná impedancia opätovväzobnej vetvy.

$U_S = \beta I_2$

$U_1 = U_S + U_0$

$$I_2 = \frac{U_2}{Z_2 + Z_{S1}} \qquad U_S = \frac{\beta I_2}{\cancel{Z_2 + Z_{S1}}} = \overbrace{\frac{\beta}{Z_2 + Z_{S1}}}^{\beta} U_2 = \beta U_2$$

$$\left.\begin{aligned} U_2 &= A_0 U_1 \\ U_S &= \beta U_2 \\ U_1 &= U_0 + U_S \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad U_1 / U_0 = 1/k.$$

Obr. 125.

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= I_0 + I_S \\ U_2 &= A_0 U_1 \\ I_S &= \sigma U_2 \\ U_1 &= I_1 Z_1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} I_1 &= I_0 + I_S = I_0 + \sigma U_2 = I_0 + \sigma A_0 U_1 = \\ &= I_0 + \sigma A_0 Z_1 I_1 = I_0 + \underbrace{\sigma Z_1}_{\beta} A_0 I_1 \\ &= I_0 + \beta A_0 I_1 \end{aligned}$$

$$I_1 (1 - \beta A_0) = I_0$$

$$I_1 = I_0 \frac{1}{1 - \beta A_0} = \frac{I_0}{k}.$$

$$U_2 = A_0 U_1$$
$$I_S = \alpha I_2$$
$$I_1 = I_0 + I_S$$
$$U_1 = I_1 Z_1$$
$$U_2 = I_2 (Z_2 + Z_{S1})$$

$$I_1 = I_0 + I_S = I_0 + \alpha I_2 = I_0 + \alpha \frac{U_2}{Z_2 + Z_{S1}} =$$

$$= I_0 + \alpha \frac{A_0 U_1}{Z_2 + Z_{S1}} = I_0 + \alpha \frac{A_0 I_1 Z_1}{Z_2 + Z_{S1}}$$

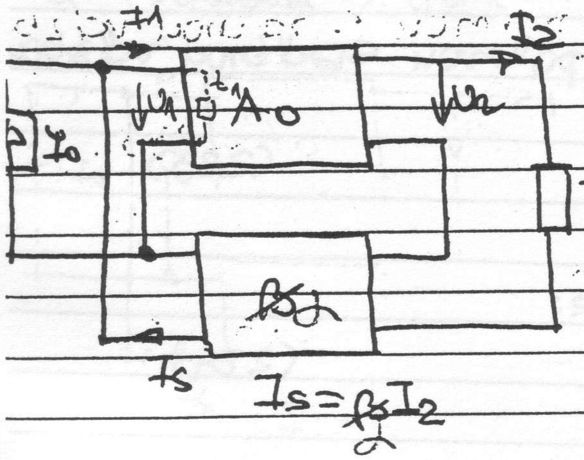
$$I_1 \Big(1 - \underbrace{\frac{\alpha Z_1}{Z_2 + Z_{S1}}}_{\beta} A_0\Big) = I_0$$

$$I_1 (1 - A_0 \beta) = I_0$$

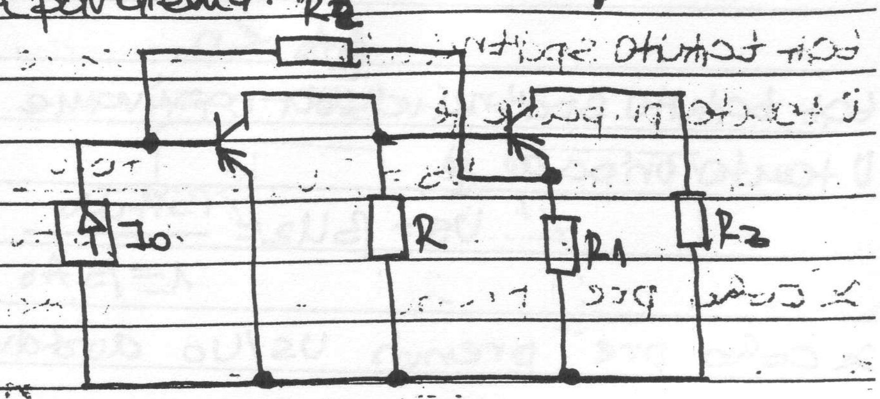
$$I_1 = I_0 \frac{1}{1 - \beta A_0} = \frac{I_0}{k}$$

$$I_1 / I_0 = \frac{1}{k}$$

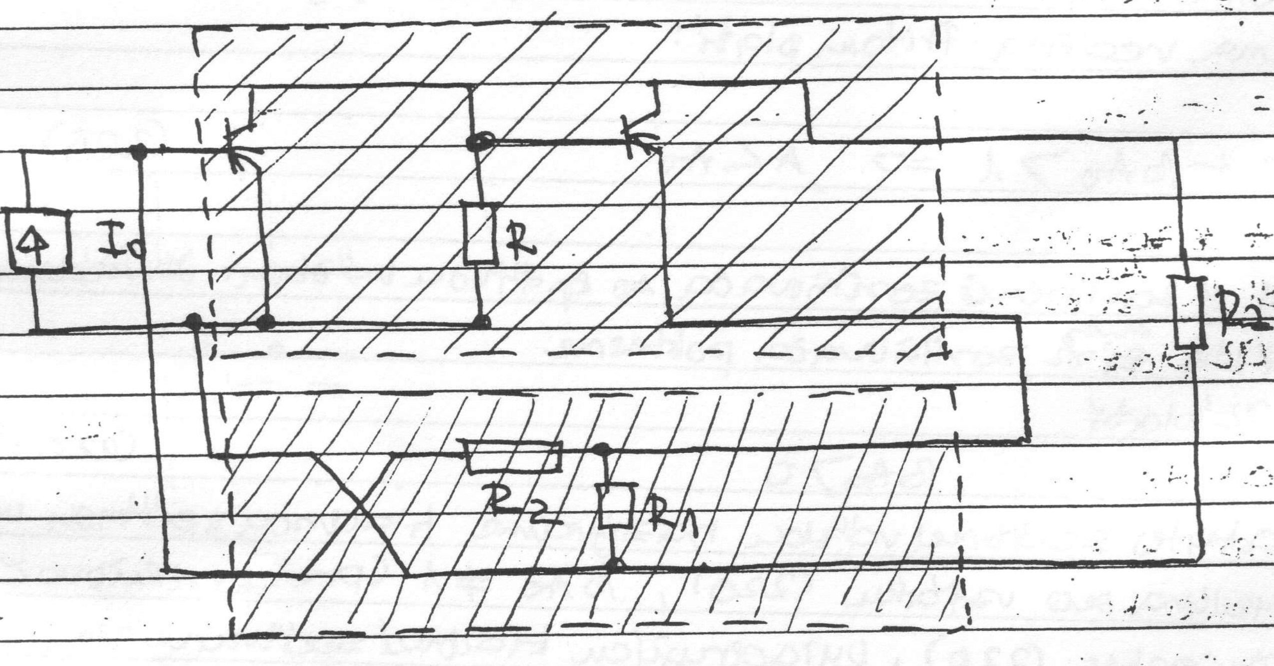
d. Prúdová spätná väzba paralelná.



Obr. 128.



Obr. 129.



obr. 130

Predpokladajme teraz, že prenos zosilňovacej a spätnoväzobnej veliny sú reálne, potom v závislosti od toho, aké znamienko má výraz

$$\beta A_0$$

rozdeľujeme spätné väzby do dvoch kategórií a to na zápornú a kladnú spätnú väzbu.

Keď je βA_0 reálne a má záporné znamienko, t.j. [illegible] platí:

$$\beta A_0 < 0 \quad (222)$$

tak takúto spätnú väzbu nazývame zápornou spätnou väzbou. V tomto prípade je

$$U_S = \beta U_2 = \frac{\beta A_0 U_0}{1 - \beta A_0} \quad (223)$$

z čoho pre prenos U_S/U_0 dostávame:

$$\frac{U_S}{U_0} = \frac{\beta A_0}{1 - \beta A_0} < 0 \quad (224)$$

Záporná spätná väzba vzniká pri zosilňovači vtedy, keď sa z jeho výstupu dostane na vstup napätie, ktoré je v protifáze s vstupným napätím. Stupeň spätnej väzby je v našom prípade väčšia ako 1. Pritom platí:

$$K = 1 - \beta A_0 > 1 \Rightarrow A < A_0 \quad (225)$$

kde A je zosilnenie zosilňovača so spätnou väzbou. Zavedením spätnej väzby teda zisk zosilňovača poklesne.

Ak platí

$$\beta A_0 > 0 \quad (226)$$

tak takúto spätnú väzbu nazývame kladnou spätnou väzbou. Pretože vyplýva zo vzťahu (220), $\beta A_0 \neq 1$ (pre zosilňovač). Preto podmienku (220), vyjadrujúcu kladnú spätnú väzbu treba písať takto:

$$0 < \beta A_0 < 1 \quad (227)$$

Stupeň spätnej väzby je v tomto prípade

$$0 < K = 1 - \beta A_0 < 1 \quad (228)$$

Z uvedeného plynie, že

$$A > A_0 \quad (229)$$

t. j. zavedením kladnej spätnej väzby sa zisk zosilňovača zvyšuje.

6.3. Výstupná impedancia zosilňovača so spätnou väzbou

Zosilňovač so spätnou väzbou ako každý iný zosilňovač možno považovať z hľadiska vonkajšej záťaže Z_z pripojenej k jeho svorkám výstupným svorkám za zdroj signálu, ktorý má svoje charakteristické veličiny: napätie naprázdno, U_p, prúd nakrátko I_k a vnútornú impedanciu Z_i. Vnútorná impedancia tohoto zdroja je totiž výstupná impedancia zosilňovača.

Uvažujme najskôr prípad NAPÄŤOVEJ SPÄTNEJ VÄZBY (obr. 119). Pre napätie ~~na výstu~~ naprázdno na výstupe zosilňovača platí:

$$U_{pn} = \frac{U_{po}}{K} \qquad (230)$$

kde U_{pn} – napätie zosilňovača so spätnou väzbou, a U_{po} – bez spätnej väzby. Prúd nakrátko je

$$I_{kp} = I_{ko} \qquad (231)$$

Keď je výstup zosilňovača zapojený doskratu, nie je tam žiadne napätie a teda aj signál privádzaný na vstup je nulový. To ale znamená, že zosilňovač so spätnou väzbou napäťovou ostane nakrátko, sa správa tak, ako zosilňovač bez spätnej väzby. Pre výstupnú impedanciu z uvedeného plynie:

$$Z_{in} = \frac{U_{pn}}{I_{kn}} = \frac{U_{po}}{K}\frac{1}{I_{ko}} = \frac{Z_{io}}{K}$$

$$\boxed{Z_{in} = \frac{Z_{io}}{K}} \qquad (232)$$

Pri prúdovej spätnej väzbe jednotlivé veličiny označíme druhým indexom "p". Pre napätie naprázdno platí:

$$U_{pp} = U_{po} \qquad (233)$$

pretože na výstupe netečie žiadny prúd. Preto je signál privádzaný na vstup cez spätnú väzbu nulový a zosilňovač sa správa tak, ako by tu spätná väzba vôbec nebola. Prúd nakrátko je daný výrazom

$$I_{kp} = \frac{I_{ko}}{K} \qquad (234)$$

Pre výstupnú impedanciu potom dostaneme

$$Z_{ip} = \frac{U_{po}}{I_{kp}} = \frac{U_{po}}{I_{ko}/K} = \frac{U_{po}}{I_{ko}} K = Z_{io} K \qquad (235)$$

t.j.

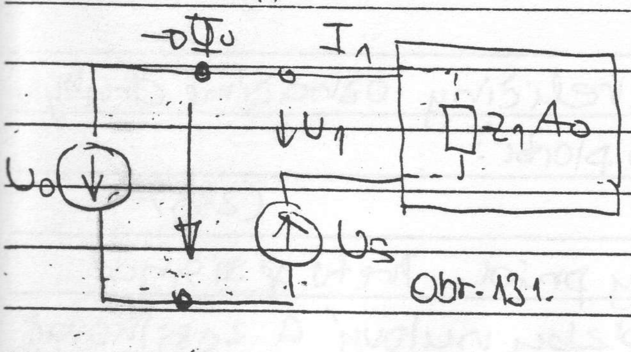
$$\boxed{Z_{ip} = Z_{io} K} \qquad (236)$$

6.4. Vstupná impedancia zosilňovača so spätnou väzbou

Pod vstupnou impedanciou zosilňovača rozumieme takú impedanciu, ktorú keď pripojíme k zdroju vonkajšieho signálu, bude zo zdroja odoberať pri nezmenenom napätí taký istý prúd, aký sa odoberá pri pripojenom zosilňovači. Vstupnú impedanciu zosilňovača bez spätnej väzby označme Z_0. Platí preň vzťah:

$$Z_0 = \frac{U_0}{I_0} = \frac{U_1}{I_1} = Z_1 \qquad (237)$$

Teraz sa budeme zaoberať vplyvom spätnej väzby sériovej na vstupnú impedanciu zosilňovača (ako index s). Spätnoväzobnú vetvu tu môžme považovať za zdroj napätia U_s privádzaného späť, ktorý je zapojený do série so zdrojom vonkajšieho napätia U_0 (obr. 131).



Obr. 131.

Nakoľko platí:

$$U_2 = \frac{A_0}{1 - A_0\beta} U_0$$

$$U_2 = A_0 U_1$$

$$\Rightarrow U_1 = \frac{1}{k} U_0$$

$$U_{0s} = k U_1$$

$$U_{0s} = k U_1 \qquad (238)$$

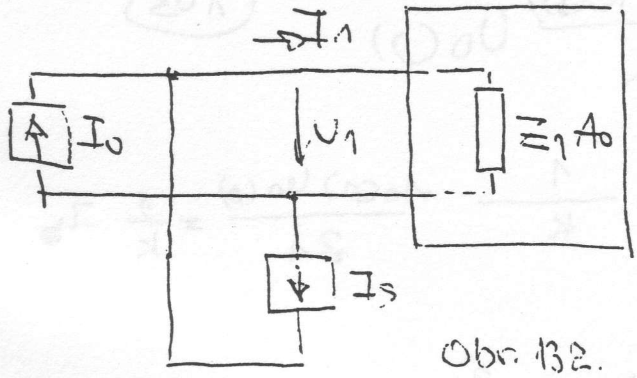
a pre prúd I_{0s} platí:

$$I_{0s} = I_1 \qquad (239)$$

Vstupná impedancia potom je:

$$Z_{0s} = \frac{U_{0s}}{I_{0s}} = \frac{k U_1}{I_1} = k Z_1 \qquad (240)$$

Uvažujme teraz prípad paralelnej spätnej väzby (index "p"). Spätnoväzobnú vetvu môžeme nahradiť zdrojom-prúdovým, ktorý je pripojený paralelne k droju vonkajšieho signálu. (obr. 132)



Obr. 132.

Ako sme ukázali v predošlom, pre I_{op} platí:

$$I_{op} = I_1 k \qquad (241)$$

a pre napätie

$$U_{op} = U_1 \qquad (242)$$

Vstupná impedancia je
$$Z_{op} = \frac{U_{op}}{I_{op}} = \frac{U_1}{I_1} \cdot \frac{1}{k} = \frac{Z_1}{k} \qquad (243)$$

Vzhľadom na všetky uvedené vzťahy môžeme zhrnúť posudky vplyvu spätnej väzby zápornej ($k > 1$) na vstupnú a výstupnú impedanciu zosilňovača takto:

	Z_{vst}	$Z_{výst}$
S – N	$Z_{vst} \cdot k$	$Z_{výst} / k$
P – N	Z_{vst} / k	$Z_{výst} / k$
S – P	$Z_{vst} \cdot k$	$Z_{výst} \cdot k$
P – P	Z_{vst} / k	$Z_{výst} \cdot k$

$$\boxed{Z_{vst} = \frac{U_0}{I_0} = \frac{U_0}{\frac{U_0 + U_S}{Z_1}} = \frac{U_0}{U_1} Z_1 = Z_1 k}$$

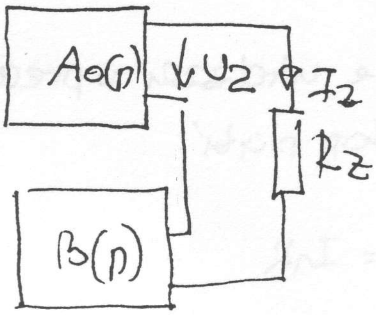
3.5 Vplyv spätnej väzby na rušivé faktory.

V rámci tohoto odseku sa budeme zaoberať vplyvom SV na drift zosilnenia, rušivé napätia a nelineárne skreslenie.

Zosilnenie zosilňovačov môže v bežnej prevádzke nepravidelne kolísať. Toto kolísanie sa označuje ako drift zosilňovača. Je to predovšetkým preto, že sa s časom menia pracovné podmienky všetkých súčiastok a súčiastky starnutím menia svoje parametre. Najväčší vplyv na nestálosť zosilnenia

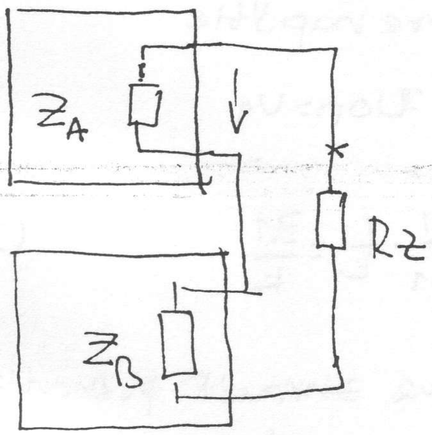
103

Výstupná impedancia zosilňovača pri použití prúdovej SU:



$$U_2(p) = \frac{A_0(p)}{K} U_0(p)$$

$$I_Z = \frac{U_2}{Z_A} = \frac{1}{k} \frac{A_0(p)\, U_0(p)}{Z_A} = \frac{1}{k} I_0$$



1. $U_{PP} = U_{P0}$

2. $I_{KP} = \frac{1}{k} I_{K0}$

$$Z_{VP} = \frac{U_{P0}}{I_{KP}} = \frac{U_{P0}}{\frac{I_{K0}}{k}} = k \frac{U_{P0}}{I_{K0}} = \underline{k Z_V}$$

$$I_{K0} = \frac{U_2}{Z_A} = \frac{A_0 U_0}{Z_A}$$

$$I_{KP} = I_Z\Big|_{R_Z=0} = \frac{U_2}{Z_A} = \frac{A_0 U_0}{K Z_A} = \frac{1}{k} \frac{U_0 A_0}{Z_A} = \frac{1}{k} I_{K0}$$

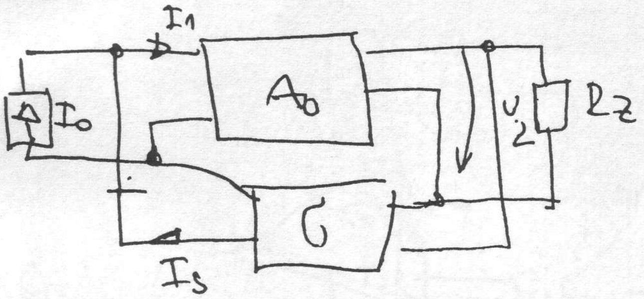
$$Z_{VP} = \frac{U_{PP}}{I_{KP}} = \frac{U_{P0}}{\frac{1}{k} I_{K0}} = k \frac{U_{P0}}{I_{K0}} = \underline{k Z_{V0}}$$

$$Z_{vst} = \frac{U_0}{I_0} = \frac{U_0}{\frac{U_0+U_S}{Z_1}} = \frac{U_0}{U_1} Z_1 = \underline{\underline{Z_1 K}}$$

104

$$\frac{U_0}{U_1} = 1-\beta A = k \Rightarrow \frac{U_0}{k} = U_1$$

$$U_1 = \frac{U_0}{k} \qquad AU_1 = \frac{A}{k} U_0 \qquad U_2 = \frac{A}{1-\beta A} U_0$$



$$I_S = G U_2 =$$

$$I_1 = I_0 + I_S = I_0 + G U_2 = I_0 + G A_0 U_1 =$$

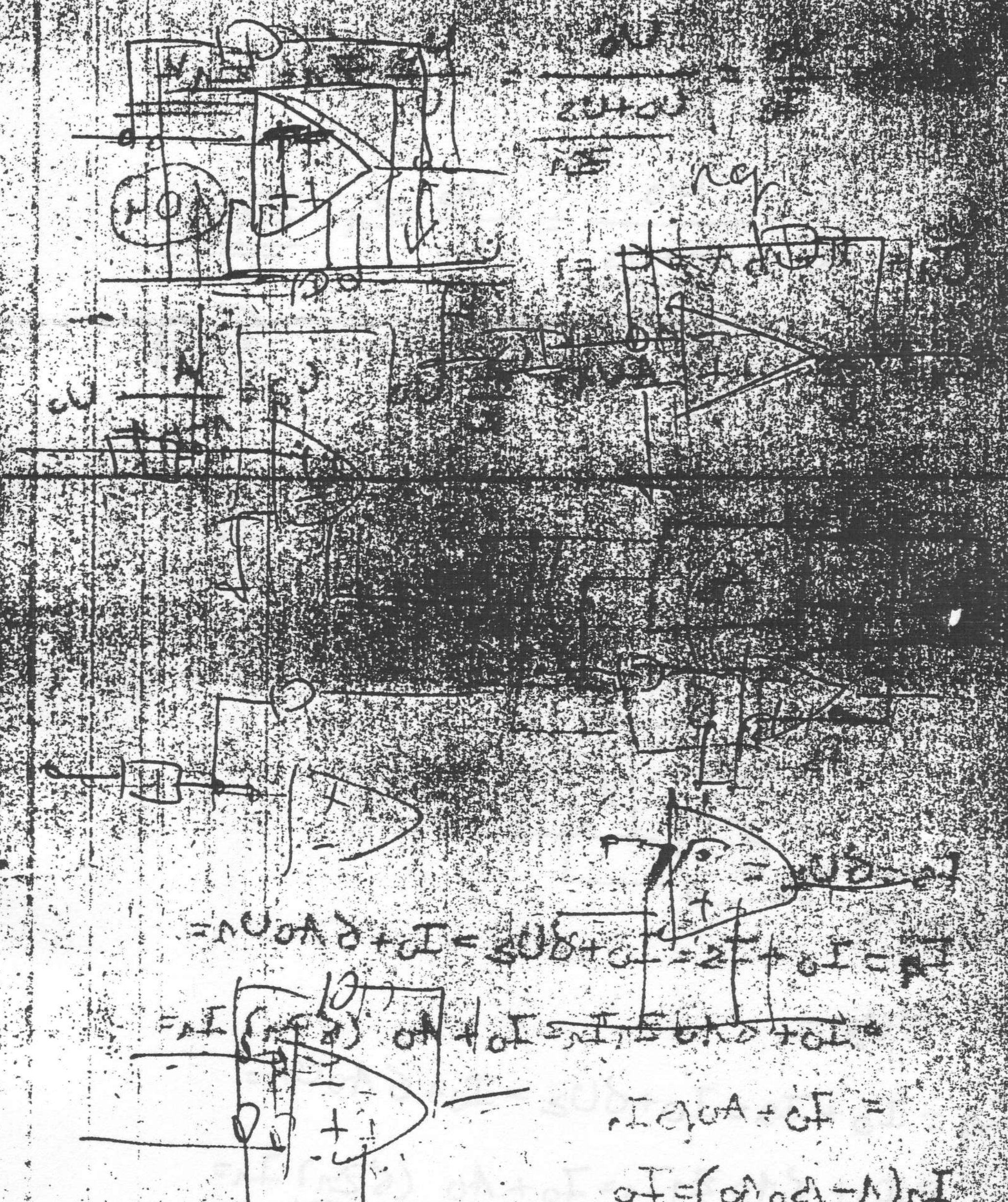
$$= I_0 + G A_0 Z_1 I_1 = I_0 + A_0 \underbrace{(G Z_1)}_{\beta} I_1 =$$

$$= I_0 + A_0 \beta I_1$$

$$I_1(1-\beta_0 A_0) = I_0$$

$$\frac{I_1}{I_0} = \frac{1}{1-\beta_0 A_0} = \frac{1}{k}$$

$$Z_{vst} = \frac{U_0}{I_0} = \frac{I_1 Z_1}{I_0} = Z_1/k$$



$$= I_0 + A_0 \beta_i I_1$$

$$I_1(1-\beta_0 A_0) = I_0$$

$$\frac{I_1}{I_0} = \frac{1}{1-\beta_i A_0} = \frac{1}{k}$$

$$\frac{U_0}{I_0} = \frac{I_1 Z_1}{I_0} = Z_1/k$$

majú teplota a napájacie napätia. S teplotou sa mení priebeh V-A charakteristík a polohy pracovných bodov polovodičových prvkov. Napájacie napätia zas určujú polohu kľudových pracovných bodov.

Najdôležitejším parametrom pre vyjadrenie driftu zosilnenia je relatívna zmena zosilnenia vyjadrená pomerom $\frac{dA_0}{A_0}$ bez spätnej väzby alebo dA'/A' po zavedení spätnej väzby.

Nech pre zosilnenie zosilňovača so spätnou väzbou platí:

$$A' = \frac{A_0}{1-\beta A_0} \qquad (244)$$

Potom relatívnu zmenu zosilnenia dA'/A' možno odvodiť takto:

$$\frac{dA'}{dA_0} = \frac{(1-\beta A_0)-A_0(-\beta)}{(1-\beta A_0)^2} = \frac{1}{(1-\beta A_0)^2} \qquad (245)$$

$$\frac{dA'}{dA_0} = \frac{A_0}{(1-\beta A)}\,\frac{1}{1-\beta A}\,\frac{1}{A_0} = A'\,\frac{1}{1-\beta A}\,\frac{1}{A_0}$$

$$\frac{dA'}{A'} = \frac{dA_0}{A_0}\,\frac{1}{1-\beta A}$$

$$\frac{dA'}{A'} = \frac{dA_0}{A_0}\,\frac{1}{K} \qquad (245)$$

Zo vzťahu (245) vidieť, že relatívna zmena prenosu sa pri zavedení spätnej väzby zmení rovnako, ako zosilnenie. Za predpokladu, že $K>1$ (záporná SV), tak sa drift prenosu zmenšuje. Záporná spätná väzba preto zmenšuje kolísanie prenosu.

Snaha po dosiahnutí čo najstálejšieho prenosu elektronických zosilňovačov vedie spravidla k zavádzaniu silnej zápornej spätnej väzby, pri ktorej je stupeň spätnej väzby

$$K \gg 1. \tag{246}$$

V tomto prípade ale platí:

$$K = 1 - \beta A \approx -\beta A \tag{247}$$

Dosadením (247) do (244) potom pre prenos zosilňovača so spätnou väzbou dostávame vzťah:

$$A_u \approx -\frac{1}{\beta} \tag{248}$$

Zo vzťahu (248) je zrejmé, že ak platí (246), tak nezávisí výsledné zosilnenie na pôvodnom. Výsledné zosilnenie je dané len činiteľom spätnej väzby β, ktorý môžeme v určitých medziach nastaviť pomocou kombinácie pasívnych dostatočne stabilných prvkov. Na tomto princípe je založené použitie operačných zosilňovačov.

Rovnaký účinok, aký má SV na užitočné signály, má i na signály rušivé, parazitné. Rozdiely medzi pôsobením spätnej väzby na rušivý a užitočný signál sú spravidla v tom, že užitočný a rušivý signál vnikajú do prenosového reťazca v rôznych miestach a že po zavedení SV často meníme úroveň užitočného signálu. Ak zavedieme do obvodu SV a rušivé i užitočné signály zapadajú do stredného frekvenčného pásma, pôsobí SV rovnako na všetky signálové zložky, takže odstup signálu od rušenia sa nemení.

Po zavedení zápornej SV klesnú hodnoty všetkých zložiek signálu na výstupe v rovnakej miere. Ak je predpísané určité výstupné napätie (alebo výkon) užitočného signálu, musíme po zavedení zápornej SV zväčšiť amplitúdu budenia úmerne zavedenému stupňu zosilnenia K. Pretože zdroje rušivých signálov sa pritom nemenia, stúpa tiež odstup signálu od šumu, čo možno v niektorých prípadoch využiť.

Z uvedeného vyplýva, že zápornú SV nemožno použiť k zlepšeniu odstupu signálu od šumu, ak je predpísaná určitá vstupná citlivosť zariadenia a ak pochádza šum zo vstupného obvodu. Toušak

127 (107)

-znamená, že šum nieje možné nikdy ovplyvniť pomocou spätnej väzby. Preto
-name, šumové číslo tranzistorov závisí na impedancii zdroja bude-
a tranzistora. Požiadavke nízkeho šumu možno potom vyhovieť tak, že
-dúci obvod navrhneme tak, aby mal impedanciu čo možno naj bližšie
optimu z hľadiska šumu, a vstupné parametre zosilňovača upravíme v
tak, aby vyhovovali ostatným požiadavkám. (napr. vstupná impedancia
zosilňovača).

Nelineárne skreslenie možno považovať za objavenie sa vyšších
harmonických zložiek na výstupe obvodu, ak na vstupe obvodu je čistý
harmonický signál (sínusový). Veličinu, ktorá číselne udáva mieru
nelineárneho skreslenia nazývame činiteľom nelineárneho skresle-
nia (činiteľ celkového harmonického skreslenia, to k), ktorý
možno definovať vzťahom

$$k = \frac{\sqrt{U_{2m}^2 + U_{3m}^2 + \dots + U_{n m}^2 \dots}}{U_{1m}} \qquad k' = \sqrt{\frac{U_2^2 + U_3^2 + \dots U_n^2 + \dots}{U_1^2 + U_2^2 + \dots U_n^2 + \dots}} \qquad (249)$$

kde U_{im} je amplitúda m-tej harmonickej zložky. Analýza
vplyvu spätnej väzby väzby na nelineárne skreslenie
ukazuje, že zavedením spätnej väzby znižuje nelineár-
ne skreslenie podľa vzťahu

$$k' = \frac{k}{F} \qquad (250).$$

$k \leq 10\%$ $k \approx k'$

f. 6. Vplyv frekvenčne nezávislej spätnej väzby na
frekvenčnú závislosť prenosu.

Uvažujme sústavu zosilňovača so spätnou väzbou, kde
prenos zosilňovača bez spätnej väzby je

$$A_0(p) = \frac{A_s}{1 + p\tau_a} \qquad (251)$$

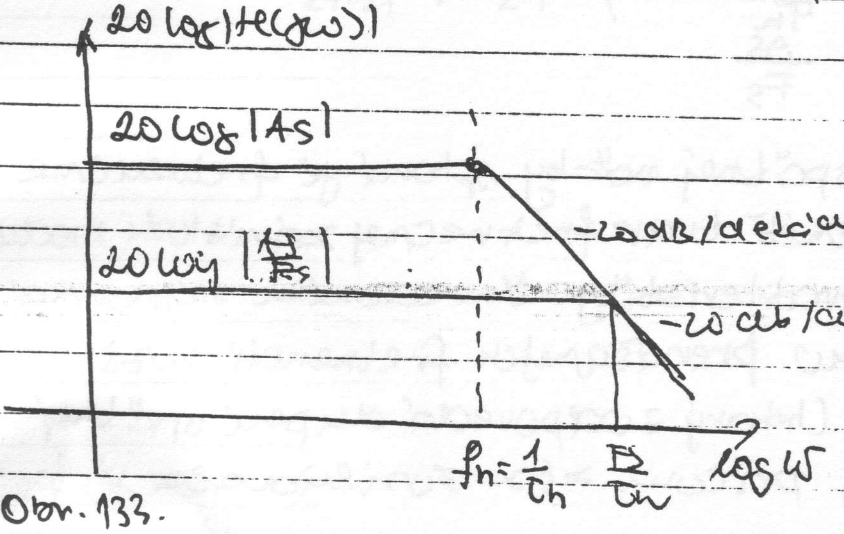
a prenos spätnoväzobnej vetvy je v celom frekvenčnom
pásme reálny a konštantný, t. j. platí:

$$\beta(p) = \beta = konšt. \qquad (252).$$

Zo vzťahu (251) vidieť, že pre frekvenčnú charakteristiku zosilňovača bez spätnej väzby platí:

$$A_0(j\omega) = \frac{A_s}{1 + j\omega \tau_h} \qquad (253)$$

čomu zodpovedá amplitúdová frekvenčná charakteristika dolného priepustu (obr. 133). Amplitúdovú frekvenčnú charakteristiku zosilňovača po zavedení spätnej väzby a tomu dosadením vzťahu (253) do (220). Potom pre prenos zosilňovača platí:



Obr. 133.

$$A(j\omega) = \frac{A_0(j\omega)}{1 - \beta A_0(j\omega)} \qquad (254)$$

t.j.

$$A(j\omega) = \frac{A_0(j\omega)}{1 - \beta A_0(j\omega)} = \frac{\frac{A_s}{1 + j\omega\tau_h}}{1 - \beta \frac{A_s}{1 + j\omega\tau_h}} = \frac{A_s}{1 + j\omega\tau_h - \beta A_s} =$$

$$= \frac{A_s}{(1 - \beta A_s) + j\omega\tau_h} = \frac{A_s}{\underbrace{1 - \beta A_s}_{F_s}} \cdot \frac{1}{1 + j\omega \frac{\tau_h}{\underbrace{1 - \beta A_s}_{F_s}}} = \qquad (255)$$

Výraz $= \dfrac{A_s}{F_s} \dfrac{1}{1 + j\omega \dfrac{\tau_h}{F_s}}$ (255)

Pre horný medzný kmitočet zosilňovača so spätnou väzbou platí

$$f_h' = \frac{F_s}{\tau_h F_s} \qquad (256)$$

pričom pre zisk zosilňovača vo frekvenčnom pásme

$$\omega < f_h \qquad (254)$$

platí: $$A' = A_s / F. \qquad (258)$$

Použitím vzťahov (256) – (258) možno zakresliť amplitúdovú frekvenčnú charakteristiku zosilňovača so spätnou väzbou.

Z obr. 133, a to aj zo vzťahov

$$A_{fh} = \frac{1}{\tau_h} \qquad f_h' = \frac{F_s}{\tau_h} \quad ; \quad F_s = 1 - \beta A_s$$

$$A_s \qquad A' = \frac{A_s}{F_s}$$

Vidíme, že zavedenie spätnej väzby, ktorá je frekvenčne nezávislá, nebude meniť tvar frekvenčnej závislosti modulu ani fázy frekvenčnej charakteristiky. Zavedením zápornej spätnej väzby sa pásmo prenášaných frekvencií rozširuje úmerne výrazu F_s, (ktorý zodpovedá stupni spätnej väzby pre $f < \frac{1}{\tau_h}$), pričom zisk zosilňovača je $\frac{1}{F_s}$ krát menší.

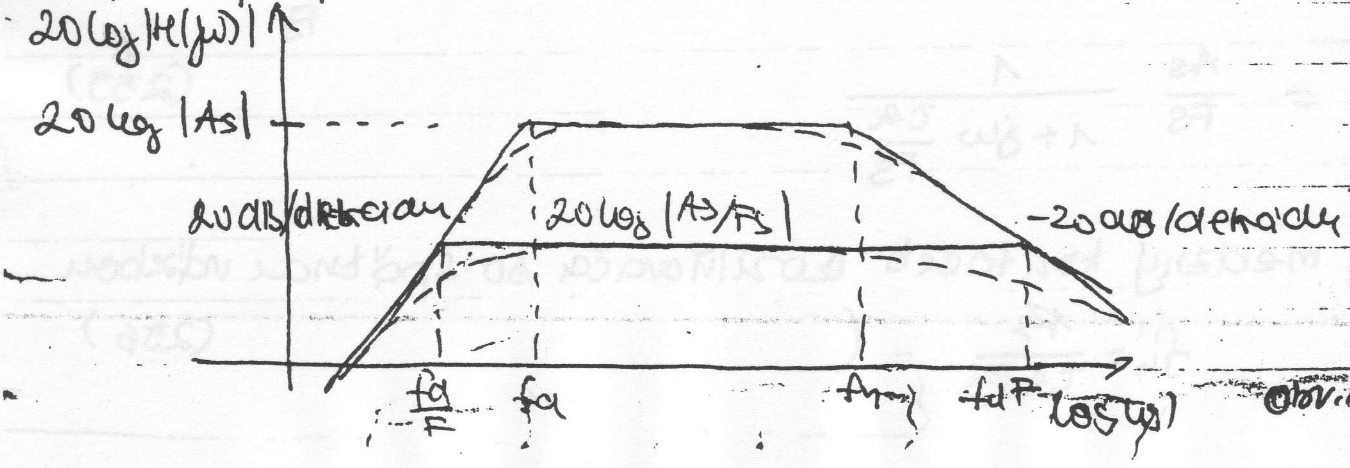
Podobný záver možno urobiť i pre dolné frekvenčné pásmo, ak v ňom pôsobí jediný derivačný obvod. Tu platí

$$A_d(j\omega) = \frac{A_s}{1 + \frac{1}{j\omega\tau_d}} \qquad (259)$$

$$A_d'(j\omega) = A_s' \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega\tau_d'}} \qquad (260)$$

kde $\tau_d' = \tau_d F_s$ $\quad f_d' = f_d / F_s \quad A_s' = A_s / F_s$ (261)

Výsledky týchto úvah sú znázornené na obr. 134, pre prípad zápornej spätnej väzby.



obr. 134.

8. Stabilita lineárnych a linearizovaných obvodov

Pod pojmom stability obvodu budeme rozumieť schopnosť obvodu reagovať na prechodný vzruch niektorej elektrickej veličiny, ktorú môžeme považovať za veličinu vstupnú. Obvod bude stabilný, ak akýkoľvek vzruch prúdu alebo napätia, vyvolaný v ktoromkoľvek mieste obvodu, spôsobí po svojom doznení tiež doznievajúcu odozvu v celom obvode. Obvod je nestabilný, ak po skončení rozruchu odozva trvá neobmedzene dlho.

O stabilite lineárnej obvodovej sústavy sa možno matematicky presvedčiť pokusom, pri ktorom predpokladáme, že na uvažovanom (myslenom) vstupe sústavy pôsobí vzruch s časovým priebehom v tvare jednotkového impulzu. Nakoľko

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \qquad (262).$$

tak pre odpoveď sústavy platí

$$Y(p) = H(p) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i p^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i p^i} \qquad (263)$$

kde $H(p)$ je prenosová funkcia lineárnej sústavy. V prípade lineárnych obvodov je počet pólov a núl prenosovej funkcie konečný, pričom možno predpokladať, že stupeň polynómu v menovateli je vyšší ako stupeň polynómu v čitateli, t.j.

$$n > m \qquad (264)$$

Pri tejto podmienky, možno obraz odpovede písať v tvare

$$Y(p) = \frac{A_1}{p-p_1} + \frac{A_2}{p-p_2} + \dots + \frac{A_n}{p-p_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{p-p_i} \qquad (265)$$

kde súčiniteľ A_i je daný vzťahom

$$A_i = [(p-p_i)\,Y(p)]_{p=p_i} \qquad (266)$$

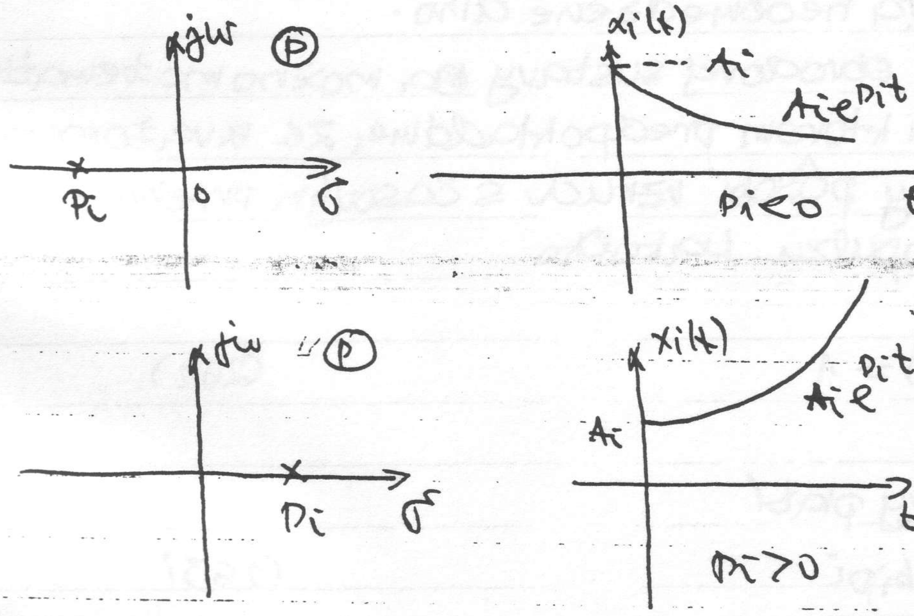
Podľa pravidiel spätnej Laplaceovej transformácie pre časový priebeh odpovede sústavy platí:

(superpozíciou dielčích čiastkových) odpovedí

$$y(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + A_3 e^{p_3 t} + \dots + A_n e^{p_n t} \qquad (267)$$

~~Keďže prenosovej spätnej transformácie~~

Pretože koeficienty menovateľa $H(p)$ sú v elektronických obvodoch reálne, tak korene menovateľa $H(p)$, t.j. póly prenosovej funkcie môžu byť buď reálne, alebo sa vyskytujú v komplexne združených dvojiciach. Každému reálnemu pólu p_i zodpovedá impulzová odpoveď $x_i(t) = A_i e^{p_i t}$. ~~[illegible]~~ Ak je pól p_i – záporný, je umiestnený na reálnej ose v ľavej polrovine roviny (p). (obr.135.). Impulzná odpoveď v tomto prípade exponenciálne doznieva, z čoho plynie že obvod je stabilný. Ak je naopak pól p_i reálny kladný (obr. 135), impulzová odpoveď s časom exponenciálne rastie a obvod je teda nestabilný.



obr.135.

Ak je reálny pól v počiatku roviny p, je odpoveď konštantná $(x_i(t) = A_i)$, teda vôbec nezaniká, takže obvod je opäť nestabilný. Taký stav sa tiež nazýva medzou nestability. (alebo naopak medzou stability).

Komplexné póly sa vyskytujú v komplexne združených dvojiciach, pre ktoré platí

$$A_k = c_k + j a_k \qquad A_k^* = c_k - j a_k \qquad (268)$$
$$p_k = \sigma_k + j\omega_k \qquad p_k^* = \sigma_k - j\omega_k$$

časový priebeh odpovede zodpovedajúci tejto dvojici pólov je:

$$x_k(t) = A_k e^{p_k t} + A_k^* e^{p_k^* t} \qquad (269)$$

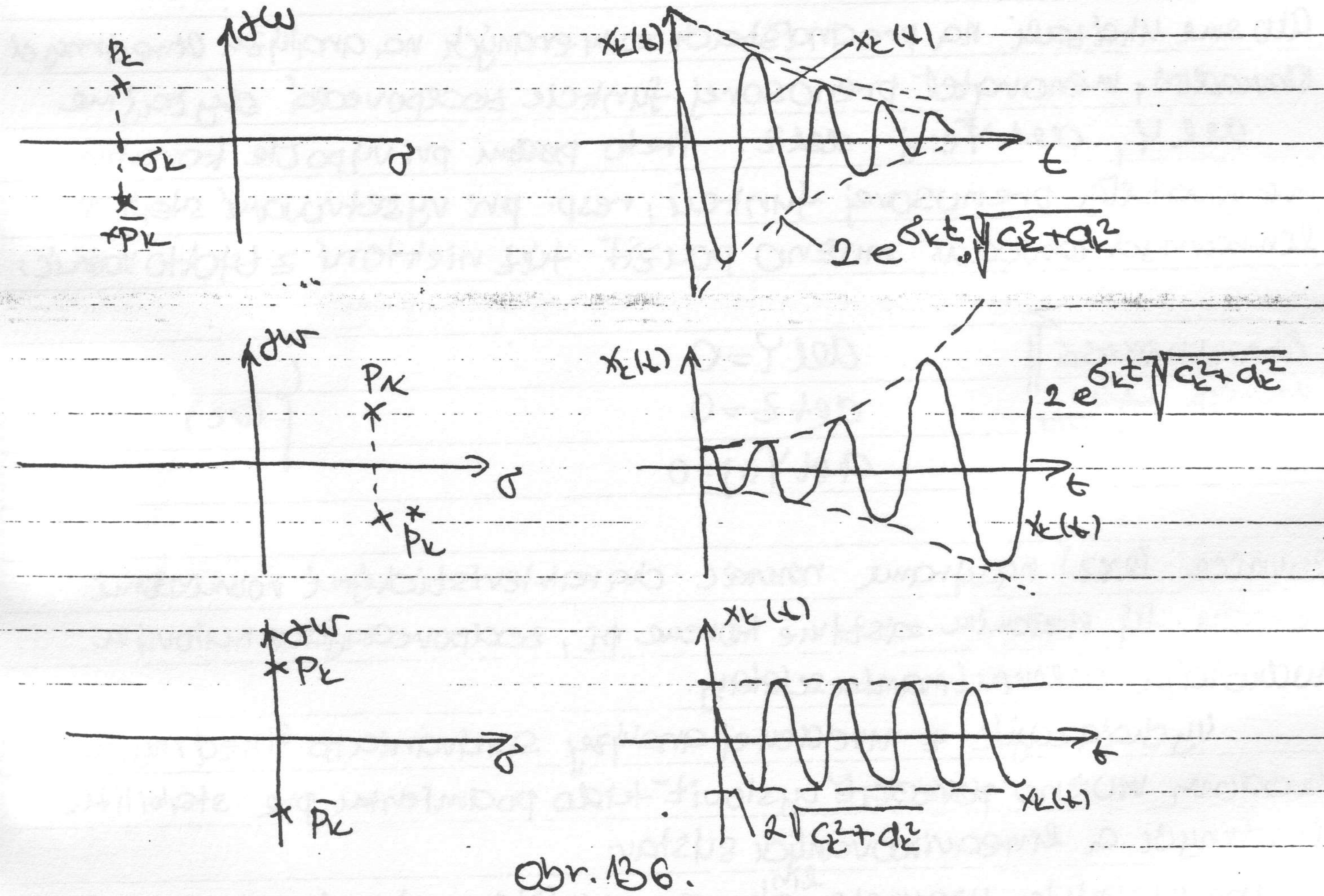
dosadení (268) do (269) dostávame

$$x_k(t) = 2 e^{\sigma_k t} [c_k \cos \omega_k t - a_k \sin \omega_k t]$$

$$x_k(t) = 2 e^{\sigma_k t} \sqrt{c_k^2 + a_k^2} \cos(\omega_k t + \varphi_k) \qquad (270)$$

de $$\varphi_k = \operatorname{arctg} \frac{d_k}{a_k} \qquad (271)$$ 112

tabilitu môžeme dobre posúdiť podľa vzťahu (270). Zo vzťahu (270) ynie, že stabilita závisí len na reálnej zložke p_k v prvej časti výrazu. k je $\sigma_k < 0$, je obvod stabilný. Ak je $\sigma_k > 0$ je obvod nestabilný. Pri $\sigma_k = 0$ je obvod nestabilný, na medzi nestability (Obr. 136)



Obr. 136.

Z predošlého rozboru vyplývajú nasledujúce závery, ktoré možno vztiahnuť na prenosovú funkciu $H(p)$ bez ohľadu na to, či sa jedná o prenos napätia, resp. prúdu.:

1. Rozloženie pólov $H(p)$ jednoznačne určuje základný charakter prechodovej odpovede.
2. Reálne póly vedú na aperiodickú odpoveď, odpoveď s pólmi komplexne združenými má kmitavý charakter s exponenciálnou alebo priamkovou obálkou.
3. Ak ležia všetky póly $H(p)$ v ľavej polrovine, je obvod stabilný.

4. Imaginárna os roviny p je hraničnou čiarou medzi oblasťou stability a nestability, ktorá leží ešte v oblasti nestability.
5. Aby obvod bol nestabilný, stačí aby jediný reálny pól alebo dvojica komplexne združených pólov ležala v pravej polrovine, vrátane imaginárnej osi.

Ako sme ukázali na prednáškach zameraných na analýzu lineárnych obvodov, menovateľ prenosovej funkcie zodpovedá objektívne $\det Y$, $\det Y^{*}_{ij}$, $\det Z$. Preto popri výpočte koreňov menovateľa prenosovej funkcii, resp. pri vyšetrovaní stability lineárnych obvodov možno použiť tiež niektorú z týchto rovníc:

Charakteristická rovnica LAO:

$$\left.\begin{aligned} \det Y &= 0 \\ \det Z &= 0 \\ \det Y^{*}_{ij} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (272)$$

Rovnice (272) nazývame rovnaké charakteristickými rovnicami obvodu. Ich riešením zistíme korene p_i, zodpovedajúce nulovým hodnotám determinantu sústavy.

Vychádzajúc z uvedenej analýzy správania sa lineárnych obvodov, možno povedať vysloviť takúto podmienku pre stabilitu lineárnych a linearizovaných sústav:

Pre stabilitu uzavretej lineárnej obvodovej sústavy je nutnosť a postačujúce, aby všetky póly jej prenosovej funkcie ležali v ľavej polrovine komplexnej roviny (p).

~~Nakoniec~~ Riešenie rovníc (272) resp. rovnice

$$A(p) = 0 \quad (273)$$

kde

$$H(p) = B(p)/A(p) \quad (274)$$

je "ručnými" metódami je obtiažné a zdĺhavé. Preto boli vypracované kritériá, pomocou ktorých možno jednoducho zistiť polohu koreňov ľubovoľného mnohočlena v komplexnej rovine, bez potreby jeho priameho výpočtu. Najznámejšie z týchto kritérií ~~stability~~ sú Hurwitzove kritérium stability, Routhove kritérium stability, a Nyquistove kritérium stability, Michajlovovo-Leonhardovo kritérium stability.

(114)

Poznámka:

Uzavretou (konzervatívnou) sústavou, nazývame takú autonómnu sústavu obvodov, ktorá nie je žiadnou dvojicou svoriek (žiadnou bránou) pripojená ani k vonkajším zdrojom elektromagnetickej energie, ani ku spotrebičom. Uzavretá sústava obvodov však môže obsahovať vnútorné zdroje elektromagnetickej energie, ktoré určuje kľudové pracovné body obvodových prvkov sústavy a tým i ich pracovný režim (ich parametre).

1. Hurwitzove kritérium stability.

Za klasické algebraické kritérium stability, možno považovať Hurwitzove kritérium, ktoré možno formulovať takto:

Aby rovnica

$$a_0p^n + a_1p^{n-1} + a_2p^{n-2} + \dots + a_{n-1}p + a_n = 0 \qquad (245)$$

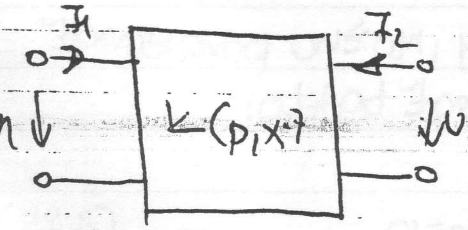
mala korene $p_1, p_2, \dots, p_n$ reálne záporné a komplexné s reálnou častou zápornou, je nutnou a postačujúcou podmienkou, aby všetky koeficienty a_0 až a_n boli nenulové a kladné a aby subdeterminanty označené v Hurwitzovej matici zostavené v uvedenom poradku boli kladné.

$$H = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_4 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & a_{n-2} & a_{n-3} & a_{n-4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & & \dots & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & & & \dots & \dots & a_n \end{vmatrix} \qquad (276)$$

Hurwitzovu maticu $\underline{H}$ zistame tak, že najskôr vyplníme hlavnú diagonálu koeficientami a_1 až a_n a potom doplníme jednotlivé riadky sprava do ľava.

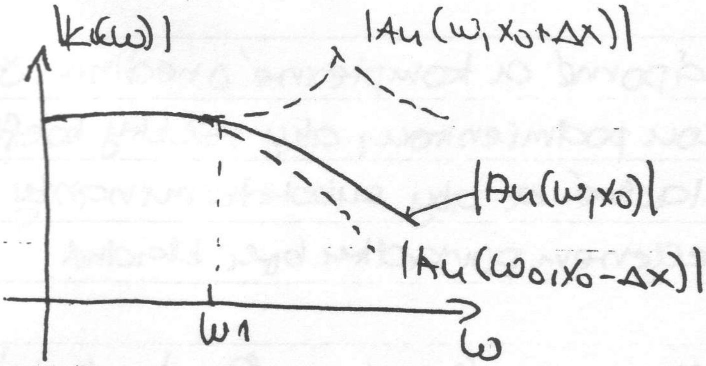
9. Citlivosť obvodových funkcií na zmenu parametru obvodového prvku.

Pri návrhu praktických obvodových zapojení je nutné riešiť tiež problémy povolených tolerancií jednotlivých súčiastok. Aby sa predišlo prípadným neúspechom pri výslednej realizácii, spôsobeným toleranciami súčiastok alebo ich závislosťou od teploty či iných vonkajších vplyvov, robí sa tzv. citlivostná analýza. Touto analýzou sa sleduje vyjadrenie vplyvu tolerancií parametrov obvodu na odchýlky obvodových funkcií od svojich nominálnych hodnôt.

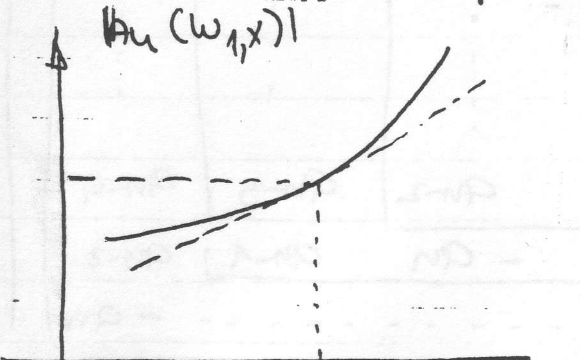


Obr. 134.

Nech obvod realizujúci dvojbránu podľa obr. 134, obsahuje vo svojej štruktúre súčiastku s nominálnou hodnotou x_0. Nech táto súčiastka má dominujúci vplyv na prenosové parametre dvojbrány. Pri odchýlke od nominálnej hodnoty obvodu ΔX sa napr. zmení AFCH spôsobom ukázaným na obr. 1[38]. Na tomto obr. vidieť, že odchýlka AFCH sa mení s ω, to znamená, že citlivosť modulovej charakteristiky závisí od ω.



Obr. 138



Obr. 139

Nech nás napr. zaujíma závislosť AFCH od parametra x, pri $\omega=\omega_1$. Experimentálne by sme napr. ze fciu

$$f=|A_u(\omega_1,x)| \qquad (277)$$

je možné vyjadriť grafom uvedeným na obr. 139. Priebeh funkcie $f=|A_u(\omega_1,x)|$ je možné v okolí bodu x_0 aproximovať priamkou, ktorá má smernicu

(116)

$$k = \frac{d\,|A_u(\omega_1, x)|}{dx}\Bigg|_{x=x_0} \qquad (277)$$

m väčšiu hodnotu bude mať smernica k, tým väčšia bude zmena 1plitúdy FCH pri danej zmene parametra x. Z uvedeného príkladu plynie – derivácia obvodovej funkcie, podľa niektorého z parametrov vodu, je mierou citlivosti obvodových funkcií na zmenu parametra vodového prvku.

Citlivosťou obvodovej fcie $F(x_1, x_2, \dots x_n, p)$ na x_i, kde sú parametre obvodu, nazývame parciálnu deriváciu obvodovej unkcie podľa x_i, t.j.

$$S_{x_i}^F = \frac{\partial F}{\partial x_i} \quad (\text{pre } p = p_0) \qquad (278)$$

=ťah

$$Sr_{x_i}^F = \frac{\partial F}{\partial x_i}\,\frac{x_i}{F} \quad (\text{pre } p = p_0) \qquad (279)$$

$$\frac{\Delta F}{F} = Sr_{x_i}^F \,\frac{\Delta x_i}{x_i}$$ } čo : ak relatívne zmenu, vzrasti o r. f. h.

zývame relatívnou citlivosťou.

Toleranciou obvodovej funkcie $F(x_i, p)$ rozumieme diferenciu

$$\Delta F = \sum_{i=1}^{n} S_{x_i}^F \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \Delta x_i \qquad (280)$$

u pre relatívnu toleranciu platí vzťah

$$\frac{\Delta F}{F} = \sum_{i=1}^{n} Sr_{x_i}^F \,\frac{\Delta x_i}{x_i} \qquad (281)$$

akú relatívnu zmenu obvodovej funk. spôsobí relatívna jedného parametra!

ymbol Δx_i v definícii tolerancie označuje maximálnu odchýlku rametra x_i od menovitej hodnoty. Parametrom sú najčastej- e hodnoty prvkov obvodových (rezistory, induktory ...).

~~Poznamenávame, že v prípade citlivosti vyšetrujeme zmeny správania sa obvodu od~~ v závislosti ~~zmien jedného parametra, pričom v prípade tolerancie vyšetrujeme zmeny v správaní sa obvodu v závislosti od niekoľkých parametrov obvodu.~~

PASÍVNE

10. LINEÁRNE DVOJPÓLY – JEDNOBRANY.

10.1. Energetické funkcie.

Ľubovoľný pasívny obvod je možné opísať sústavou integrodiferenciálnych rovníc

$$
\begin{aligned}
a_{11} i_1 + a_{12} i_2 + \dots + a_{1n} i_n &= u_1 \\
a_{21} i_1 + a_{22} i_2 + \dots + a_{2n} i_n &= u_2 \\
&\vdots \\
a_{n1} i_1 + a_{n2} i_2 + \dots + a_{nn} i_n &= u_n
\end{aligned}
\qquad (9.1)
$$

…erátor a_{ik} aplikovaný na prúd i_k tu má nasledujúci význam:

$$a_{ik} i_k = L_{ik} \frac{di_k}{dt} + R_{ik} i_k + D_{ik} \int^t i_k \, dt \qquad (9.2)$$

…e L_{ik} je indukčnosť medzi slučkami i a k, L_{kk} je celková indukčnosť v slučke k. Podobne platí pre odpor R_{ik} a inverznú kapacitu D_{ik}. Poznamenávame, že inverzná kapacita ku kapacite C je definovaná …ťahom

$$D = 1/C \qquad (9.3)$$

…plikáciou LT na sústavu rovníc (9.1.), pri uvážení nulových počiatočných podmienok, obdržíme takúto sústavu rovníc:

$$
\begin{aligned}
b_{11} I_1(p) + b_{12} I_2(p) + \dots + b_{1n} I_n(p) &= U_1(p) \\
b_{21} I_1(p) + b_{22} I_2(p) + \dots + b_{2n} I_n(p) &= U_2(p) \\
&\vdots \\
b_{n1} I_1(p) + b_{n2} I_2(p) + \dots + b_{nn} I_n(p) &= U_n(p)
\end{aligned}
\qquad (9.4)
$$

…de

$$b_{ik} = pL_{ik} + R_{ik} + D_{ik}/p \qquad (9.5)$$

…ústavu rovníc (9.4) pri uvážení (9.5) možno prepísať do tohoto …aticového tvaru:

$$U = pLI + RI + \frac{1}{p} DI \qquad (9.6)$$

kde $U^* = [U_1\, U_2 \dots U_n]^T \quad I^* = [I_1\, I_2\, I_3 \dots I_n]^T$

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2n} \\ \vdots & & & \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2n} \\ \vdots & & & \\ R_{n1} & R_{n2} & \dots & R_{nn} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2n} \\ \vdots & & & \\ D_{n1} & D_{n2} & \dots & D_{nn} \end{bmatrix}$$

Uvažujme teraz sínusové budiace veličiny. Keď označíme $\bar{I}_n$ ako komplexne združenú hodnotu k I_n, potom komplexný výkon na svorkách s napätím U_n je $U_n \bar{I}_n$. Keď vynásobíme maticu napätí transformovanou maticou prúdov, dostaneme celkový výkon dodaný n nezávislými zdrojmi za predpokladu, že sústava neobsahuje žiadne vnútorné zdroje, t.j.

$$\bar{I}^T U = [\bar{I}_1\, \bar{I}_2 \dots \bar{I}_n] \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} = U_1\bar{I}_1 + U_2\bar{I}_2 + U_3\bar{I}_3 + \dots + U_n\bar{I}_n = \sum_{n=1}^{n} U_n \bar{I}_n \qquad (9.7)$$

Ak teraz vynásobíme (9.6) zľava výrazom $\bar{I}^T$ tak dostávame:

$$\bar{I}^T U = p\,\bar{I}^T L I + \bar{I}^T R I + \frac{1}{p} \bar{I}^T D I \qquad (9.8).$$

Do rovnice (9.8) dosadíme za $p = j\omega$, potom dostávame:

$$\bar{I}^T U = \bar{I}^T R I + j\omega \bar{I}^T L I + \frac{1}{j\omega} \bar{I}^T D I = \bar{I}^T R I + j\omega \bar{I}^T L I - j\frac{\omega}{\omega^2} \bar{I}^T D I$$

t.j.

$$\bar{I}^T U = \bar{I}^T R I + j\omega\left(\bar{I}^T L I - \frac{1}{\omega^2} \bar{I}^T D I\right) \qquad (9.9).$$

Zaveďme teraz tzv. energetické funkcie F_s, T_s a V_s, definované vzťahmi:

$$F_S = \frac{1}{2}\bar{I}^T R I = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} R_{ik} \bar{I}_i I_k \quad (10.9)$$

$$T_S = \frac{1}{4}\bar{I}^T L I = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} L_{ij} \bar{I}_i I_k \quad (11.9)$$

$$V_S = \frac{1}{4\omega^2}\bar{I} D I = \frac{1}{4\omega^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} D_{ij} \bar{I}_i I_k \quad (12.9).$$

Z elementárnych úvah plynie, že funkcia F_S zodpovedá polovici stredného výkonu, rozptýleného v odporoch obvodu. Funkcia T_S zodpovedá strednej hodnote energie akumulovanej v indukčnostiach (induktoroch) a funkcia V_S zodpovedá strednej hodnote energie naakumulovanej v kapacitoroch obvodu. Z uvedených dôvodov budeme funkcie F_S, T_S a V_S nazývať energetickými funkciami. Na základe poznatku, že stredná hodnota akumulovanej energie a rozptýleného výkonu nemôže byť záporná, môžeme vysloviť dôležitý záver, že energetické funkcie nemôžu nikdy nadobúdať záporné hodnoty. Napriek tomu, že energetické funkcie obsahujú komplexné hodnoty, z výkladu ich fyzikálneho významu plynie, že musia byť reálne. Aby sme sa o tom presvedčili, uvažujme napr. komplexne združenú hodnotu k hodnote F. Potom bude podľa vzťahu (10.9) platiť

$$\bar{F} = F$$

čo môže nastať len vtedy, ak je F reálne.

Funkcie definované vzťahmi (10.9) ÷ (12.9) sa nazývajú kvadratickými formami. Tieto kvadratické formy sú vždy reálne a kladné. Kvadratické formy majúce tieto vlastnosti sa nazývajú pozitívne definitné. Ak môže kvadratická forma nadobudať i nulové hodnoty, tak sa nazýva pozitívne semidefinitnou. Pozitívne semidefinitný charakter kvadratickej formy, ktorý je nezávislý na hodnotách premenných, musí závisieť na matici kvadratickej formy. Ak je kvadratická forma pozitívne semidefinitná alebo pozitívne definitná, je tiež jej matica nazývaná pozitívne semidefinitnou alebo pozitívne definitnou. Z uvedeného plynie, že matice R, L a D sú pozitívne semidefinitné matice.

Pomocou energetických funkcií F_S, T_S a V_S, možno vzťah (9.9) vyjadriť v tomto tvare:

$$\underbrace{\bar{I}^T U}_{\text{komplexný výkon dodávaný do obv.}} = \underbrace{2F_s}_{\text{reálny výkon rozptýlený v R}} + j4\omega\underbrace{(T_s - V_s)}_{\text{reaktančný výkon akumulovaný v obvode}} \quad \Big\} \text{ rovnica výkonovej rovnováhy.} \qquad (13.9)$$

Teraz je zrejmé, že táto rovnica vyjadruje výkonovú rovnováhu medzi komplexným výkonom dodávaným do obvodu, medzi reálnym výkonom rozptýleným a reaktančným výkonom akumulovaným v obvode.

Upustíme teraz od dočasného predpokladu sínusového priebehu napätia zdrojov a vráťme sa k rovnici (9.8):

$$\bar{I}^T U = p\bar{I}^T L I + \bar{I}^T R I + \frac{1}{p}\bar{I}^T D I = pT_0 + F_0 + \frac{1}{p}V_0$$

t.j.:

$$\bar{I}^T U = F_0 + pT_0 + \frac{1}{p}V_0 \qquad (14.9)$$

kde

$$F_0 = \bar{I}^T R I \qquad T_0 = \bar{I}^T L I \qquad V_0 = \bar{I}^T D I \qquad (15.9)$$

Porovnaním týchto funkcií so zodpovedajúcimi energetickými funkciami vidíme, že sa líšia len násobnou konštantou. Tieto nové funkcie sa niekedy tiež nazývajú energetickými funkciami, hoci už nemajú fyzikálny význam energie. Zrejme sú tiež pozitívne semidefinitné, pretože každej z nich zodpovedá rovnaká matica, ako zodpovedajúcej energetickej funkcii (imitančná).

10.2. Vlastnosti obvodových funkcií.

Obráťme teraz svoju pozornosť k vyšetrovaniu vlastností obvodových funkcií z práve definovaných energetických funkcií. Pozitívne semidefinitný charakter energetických fcií sa výrazne prejaví vo vlastnostiach rôznych obvodových funkcií.

Uvažujme teraz obvod s jediným párom vonkajších svoriek, t.j. jednobránu (dvojpól). Pre tento prípad platí $U_i = 0$ pre $i > 1$. Dosadením $U_i = 0$ pre $i > 1$ do (14.9) dostávame:

$$U_1 \bar{I}_1 = F_0 + pT_0 + \frac{1}{p}V_0 \qquad (16.9)$$

Vstupnú impedanciu $Z(p)$ a vstupnú admitanciu $Y(p)$ vypočítame takto:

$$U_1\bar{I}_1 = F_0 + pT_0 + \frac{1}{p}V_0 \qquad \bar{U}_1 I_1 = F_0 + \bar{p}T_0 + \frac{1}{\bar{p}}V_0$$

$$\frac{U_1}{I_1} I_1\bar{I}_1 = Z(p)\,|I_1|^2 \qquad U_1\bar{U}_1 \frac{I_1}{U_1} = Y(p)\,|U_1|^2$$

$$Z(p)\,|I_1|^2 = F_0 + pT_0 + \frac{1}{p}V_0 \qquad Y(p)\,|U_1|^2 = F_0 + \bar{p}T_0 + \frac{1}{\bar{p}}V_0$$

$$Z(p) = \frac{1}{|I_1|^2}\left(F_0 + pT_0 + \frac{1}{p}V_0\right) \quad (17.9) \qquad Y(p) = \frac{1}{|U_1|^2}\left(F_0 + \bar{p}T_0 + \frac{1}{\bar{p}}V_0\right) \quad (18.9)$$

Získané vzťahy sú veľmi dôležité, lebo vyjadrujú vzťah medzi $Z(p)$ a $Y(p)$ a energetickými funkciami. Všimnime si, že $Z(p)$ a $Y(p)$ nie sú vo vzťahoch (17.9) a (18.9) explicitnými výrazmi premennej p, pretože i vlastné energetické funkcie sú funkciami p, lebo prúdy I_1 sú funkciami premennej p.

Pozrime sa bližšie na výraz pre impedanciu $Z(p)$ (admitanciu $Y(p)$). Funkcie F_0, T_0 a V_0 sú vždy reálne a nezáporné pre všetky hodnoty premennej p. Druhá mocnina modulu $|I_1|^2$ ($|U_1|^2$) je tiež kladná. Pre reálne p bude $Z(p)$ ($Y(p)$) reálne. Ak bude p komplexné s nezápornou reálnou časťou, bude impedancia $Z(p)$ ($Y(p)$) komplexná s nezápornou reálnou časťou. Funkcie, ktoré majú tieto vlastnosti, t.j.:

1. sú reálne pre reálne hodnoty p
2. ich reálna časť je nezáporná pre nezápornú reálnu časť premennej p

nazývame pozitívne reálnymi funkciami (PRF). Z uvedeného plynie, že vstupná impedancia alebo admitancia sú pozitívne reálne funkcie. Poznamenávame, že impedancia $Z(p)$ a admitancia $Y(p)$ sa označujú spoločným menom imitančné funkcie.

Hoci vo vzťahu (17.9) závisia energetické funkcie tiež má komplexnom kmitočte p, vypočítajme formálne nulové body impedančnej funkcie $Z(p)$:

$$\frac{1}{|I_1|^2}\left(F_0+pT_0+\frac{1}{p}V_0\right)=0$$

$$F_0+pT_0+\frac{1}{p}V_0=0$$

$$p^2T_0+pF_0+V_0=0$$

$$p^2+p\frac{F_0}{T_0}+\frac{V_0}{T_0}=0 \quad \text{z toho:}$$

$$p_{1,2}=-\frac{F_0}{2T_0}\pm\sqrt{\left(\frac{F_0}{2T_0}\right)^2-\left(\frac{V_0}{T_0}\right)} \qquad (19.9)$$

Energetické funkcie sú reálne a nezáporné, i keď sú funkciou p. Pokiaľ preto platí

$$-\frac{F_0}{2T_0}\leqq 0 \qquad (20.9)$$

je zrejmé, že nulové body impedančnej funkcie nemôžu ležať v pravej polrovine, ale ležia v ľavej polrovine roviny (p), alebo na imaginárnej osi.

V prípade bezstratových obvodov (LC) je $F_0=0$. Pre tento prípad dostávame z (19.9):

$$p_{1,2}=\sqrt{-\frac{V_0}{T_0}}=\pm j\sqrt{V_0/T_0} \qquad (21.9)$$

Vidíme, že v tomto prípade ležia nulové body $Z(p)$ na imaginárnej osi a sú komplexne združené. Podobne pre RC ($T_0=0$) a RL obvody ($V_0=0$) dostávame:

$$F_0+\frac{1}{p}V_0=0 \qquad\qquad F_0+pT_0=0$$

$$pF_0+V_0=0 \Rightarrow p_{1,2}=-\frac{V_0}{F_0}\ (RC) \qquad\qquad p_{1,2}=-\frac{F_0}{T_0}\ (RL)$$

(22.9) (23.9)

Pretože F_0, V_0, a T_0 sú vždy kladné, ležia nulové body $Z(p)$ obvodov RL a RC na zápornej časti reálnej osi.
Analogické úvahy možno previesť i pre admitančnú funkciu $Y(p)$. Ak teraz uvážime tiež, to že nuly $Z(p)$ zodpovedajú pólom $Y(p)$ a nuly $Y(p)$ zodpovedajú pólom $Z(p)$, tak môžme získané poznatky o polohe núl a pólov imitančných funkcií zhrnúť takto:

1. Nulové body a póly imitančných funkcií pasívnych dvojpólov musia ležať v uzavretej ľavej polrovine komplexných čísel (p). Uzavretou polrovinou rozumieme polrovinu naľavo (alebo napravo) od imaginárnej osi, vrátane tejto osy a bodov v nekonečne.
2. Všetky nulové body a póly imitančných funkcií reaktančných dvojpólov (obvody LC) ležia na imaginárnej osi.
3. Všetky nulové body a póly RC a RL obvodov ležia na nekladnej časti reálnej osy.

Uvažujme teraz pasívny dvojpól, ktorý pozostáva z dielčích dvojpólov, z ktorých každý je tvorený sériovým zapojením rezistora, induktora a kapacitora. Každý taký dvojpól nech tvorí vetvu sústavy pre i-tej vetvu môžeme zapísať impedanciu v operátorovom tvare takto:

$$Z_i = R_i + pL_i + \frac{1}{pC_i} \qquad (24.9).$$

Predpokladajme, že analyzujeme vyššie opísanú sústavu metódou slučkových prúdov. Ak zvolíme nezávislé slučky akokoľvek, všetky prvky impedančnej matice v hlavnej diagonále i mimo nej majú v tomto prípade tvar

$$Z_{ki} = R_{ki} + pL_{ki} + 1/pC_{ki} \qquad (25.9)$$

Pre vstupnú impedanciu potom dostávame:

$$Z(p) = \frac{\Delta}{\Delta_{1:1}} \qquad (26.9).$$

ak usteigná slučkaje označená ako 1. Ak má analyzovaná sústava m nezávislých slučiek tak pre determinant Δ a $\Delta_{1:1}$ (algebraický doplnok $\Delta_{1:1}$) dostávame:

$$\Delta = \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1m} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2m} \\ \vdots & & & \\ z_{m1} & z_{m2} & \dots & z_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z'_{11} & & \emptyset & \\ z'_{21} & z'_{22} & & \\ \vdots & & & \\ z_{m1}' & z_{m2}' & \dots & z_{mm}' \end{vmatrix} = B_m p^m + A_{m-1}p^{m-1} + \dots + B_0 + B_{-1}p^{-1} + B_{-2}p^{-2} + \dots + B_{-m}p^{-m} \quad (27.9)$$

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} z_{22} & z_{23} & \dots & z_{2m} \\ z_{32} & z_{33} & \dots & z_{3m} \\ \vdots & & & \vdots \\ z_{m2} & z_{m3} & \dots & z_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z''_{22} & & \emptyset \\ z''_{32} & z''_{33} & \\ \vdots & & \\ z''_{m2} & z''_{m3} & \dots & z''_{mm} \end{vmatrix} = A_{m-1} p^{m-1} + A_{m-2}p^{m-2} + \dots + A_0 + A_{-1}p^{-1} + A_{-2}p^{-2} + \dots + A_{-m+1} \quad (28.9)$$

kde využili tú vlastnosť determinantu, podľa ktorej sa hodnota determinantu nezmení ak k niektorému z riadkov pripočítame lineárnu kombináciu ostatných riadkov determinantu. Týmto postupom upravíme ~~det~~ maticu do trojuholníkového tvaru, ktorej determinant sa rovná súčinu jej diagonálnych prvkov. Pre diagonálne prvky matice Z' získaný ~~tejto~~ touto operáciou platí:

$$z'_{ii} = R'_{ii} + pL'_{ii} + \frac{C'_{ii}}{p} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} = \sum (-1)^d a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{mj_m} \quad (29.9)$$

~~Potom~~ pre Δ a $\Delta_{1:1}$ dostávame:

$$\Delta = \prod_{i=1}^{m} z'_{ii}, \qquad \Delta_{1:1} = \prod_{i=2}^{m} z'_{ii} \quad (30.9)$$

Po roznásobení (30.9) dostávame vzťahy (27.9) a (28.9). Použitím týchto vzťahov, pre impedanciu $Z(p)$ dostávame:

$$Z(p) = \frac{B_m p^m + B_{m-1}p^{m-1} + \dots + B_0 + \dots + B_{-1}p^{-1} + B_{-2}p^{-2} + \dots + B_{-m}p^{-m}}{A_{m-1}p^{m-1} + A_{m-2}p^{m-2} + \dots + A_0 + \dots + A_{-1}p^{-1} + A_{-2}p^{-2} + \dots + A_{-m+1}p^{-m+1}} \cdot \frac{p^m}{p^m} \quad (31.9)$$

t.j.

$$Z(p) = \frac{B_m p^{2m} + B_{m-1} p^{2m-1} + \dots + B_{-m}}{A_{m-1} p^{2m-1} + A_{m-2} p^{2m-2} + \dots + A_{-m+1} p} \quad (32.9)$$

Vzťah (32.9) môžme ďalej prepísať do tohoto tvaru:

$$Z(p) = \frac{b_r p^r + b_{r-1} p^{r-1} + b_{r-2} p^{r-2} + \dots + b_1 p + b_0}{b_s p^s + b_{s-1} p^{s-1} + a_{s-2} p^{s-2} + \dots + a_1 p + a_0} = \frac{B(p)}{A(p)} \qquad (33.9)$$

kde $r = s+1$, t.j. stupeň čitateľa je o jednotku väčší ako stupeň polynómu menovateľa.

V niektorých vetvách môžu jeden alebo dva prvky chýbať. Ak chýbajú vo všetkých vetvách rezistory, skladá sa celá sústava len z akumulačných prvkov. Taký dvojpól nazývame reaktančným dvojpólom. V tomto prípade bude platiť:

$$z_{ii} = pL_{ii} + \frac{1}{pC_{ii}} \qquad (34.9)$$

a na základe rovnakého postupu ako v predošlom, zistíme, že mnohočleny $B(p)$ a $A(p)$ majú byť len párne alebo nepárne mocniny. Ak má $B(p)$ len párne mocniny, má $A(p)$ len nepárne mocniny, a naopak.

Ak obsahuje vstupná slučka len rezistory, tak $z_{11} = R_{11}$ a teda $r = s$. Ak $z_{11} = \frac{1}{pC_{11}}$, tak $r = s-1$. Preto pre imitančné funkcie (ak urobíme podobné úvahy i pre $Y(p)$) platí:

$$r = s+1 \qquad r = s \qquad r = s-1 \qquad (35.9)$$

t.j. stupeň čitateľa a menovateľa imitančnej funkcie sa môže líšiť maximálne o jednotku.

Základné vlastnosti imitančných funkcií pasívnych sústav, opísaných vzťahom (33.9), možno zhrnúť do nasledujúcich bodov:

1) IF sú PRF.

2) Ak sú $f(p)$ a $g(p)$ PRF, tak i $f[g(p)]$ alebo $g[f(p)]$ sú PRF. Fyzikálny význam tejto vlastnosti spočíva v tom, že $g(p)$ sú impedancie dielčích pasívnych dvojpólov, je impedancia ľubovoľne spojených dielčích dvojpólov opäť PRF.

(148)

3. Ak je $f(p)$ PRF, potom i $1/f(p)$ je PRF. Fyzikálne to znamená, že $Z(p)$ aj $Y(p)$ sú PRF. Okrem toho i $f(p^{-1})$ je PRF.

5. Ak je $f(p)$ PRF a ak má nulové body a póly na imaginárnej osi alebo v nekonečnu sú jednoduché a ležia v komplexne združených dvojiciach okolo bodu $p=0$, ktorý môže byť nulou alebo pólom.

Dôkaz:
Rozviňme $f(p)$ do Taylorovho radu v okolí nulového bodu $p_0 = j\omega_0$:

$$f(p) = f(j\omega_0) + \frac{f'(j\omega_0)}{1!}(p-j\omega_0) + \frac{f''(j\omega_0)}{2!}(p-j\omega_0)^2 + \dots, \qquad (36.9)$$

kde
$$f(p_0) = f(j\omega_0) = 0 \qquad (37.9)$$

Druhý člen by bol nulový, ak by p_0 bol dvojnásobným koreňom $f(p)=0$. Impedančná funkcia je regulárna v celej pravej polrovine, takže spĺňa Cauchyho–Riemanove podmienky

$$\frac{\partial Re[Z(\sigma,\omega)]}{\partial \sigma} = \frac{\partial Im[Z(\sigma,\omega)]}{\partial \omega} \qquad \frac{\partial Re[Z(\sigma,\omega)]}{\partial \omega} = -\frac{\partial Im[Z(\sigma,\omega)]}{\partial \sigma} \qquad (38.9)$$

Uvažujme teraz reaktančný dvojpól, ktorý dostaneme zo (14.9): pri $F_0 = 0$, pre $|T_1|^2 = 1$

$$Z(p) = pT_0 + \frac{1}{p}V_0 = (\sigma + j\omega T_0) + \frac{1}{\sigma + j\omega}V_0 =$$
$$= \sigma T_0 + \frac{\sigma}{\sigma^2+\omega^2}V_0 + j\omega\left[T_0 - \frac{\omega}{\sigma^2+\omega^2}V_0\right] \qquad (39.9)$$

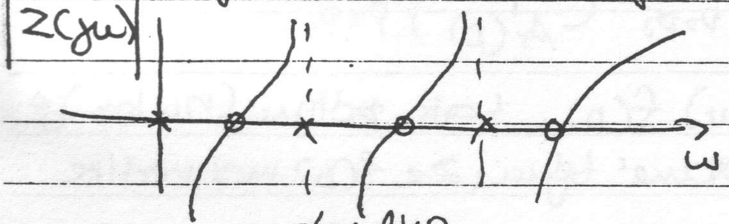
$$\frac{\partial Re[Z(\sigma,\omega)]}{\partial \sigma} = T_0 + \frac{\sigma^2+\omega^2 - \sigma(2\sigma)}{(\sigma^2+\omega^2)^2}V_0 +$$
$$+ \sigma\frac{\partial T_0}{\partial \sigma} + \frac{\sigma}{\sigma^2+\omega^2}V_0$$

pre $\sigma=0$ platí (na imaginárnej osi roviny (p))!

$$\frac{\partial Re[Z(\sigma,\omega)]}{\partial\sigma}\Big|_{\sigma=0} = \frac{\partial X}{\partial\omega}\Big|_{\sigma=0} = T_0 + \frac{v_0}{\omega^2} > 0 \qquad (40.9)$$

Pretože T_0 i v_0 nenadobúdajú záporné hodnoty. Z rovnice (40.9) plynie, že derivácia reaktančnej funkcie podľa reálneho kmitočtu je kladná, a teda nie je nulová ani v nulovom bode $p_0=j\omega_0$, takže nulový bod nemôže byť dvojnásobný, ani viacnásobný.

Zo vzťahu (40.9) plynie tiež to, že nuly a póly reaktančnej funkcie ležia na imaginárnej osi, sú jednoduché a navzájom sa striedajú!



$$\operatorname{res} f(a) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-a)^m f(z)\right]$$

obr. 140

) ak je $p_0=j\omega_0$ pólom $f(p)$, tak $Rez\{f(p)\}\big|_{p=j\omega_0}$ je reálne a kladné.

Poznámka o reziduách funkcie $f(p)$:

Rozviňme funkciu $f(z)$ v okolí ktoréhokoľvek jednoduchého singulárneho bodu (napr. z_k) do Laurentovho radu, ktorý je v tvare:

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_k} + a_0 + a_1(z-z_k) + a_2(z-z_k)^2 + \dots \qquad (41.9)$$

Člen $\frac{a_{-1}}{z-z_k}$ nazývame hlavnou časťou radu a koeficient a_{-1} je reziduom funkcie $f(z)$ v bode z_k.

(120)

Rovnicu (42.9) môžeme formálne prepísať do tvaru

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_k} + f_0(z) \qquad (43.9)$$

v ktorom je $f_0(z)$ v okolí bodu $z = z_k$ zrejme funkciou regulárnou. Potom pre rezíduum $f(z)$ platí:

$$\underset{z=z_k}{\mathrm{Rez}}\, f(z) = a_{-1} = \left[f(z)(z - z_k)\right]_{z=z_k} \qquad (44.9),$$

Vychádzajúc z tohoto vzťahu, rezíduum $f(p)$ v jednoduchom pole určíme podľa vzťahu

$$\mathrm{Rez}\{f(p)\}_{p=p_0} = \{f(p)(p-p_0)\}_{p=p_0} = \left\{\frac{B(p)}{A'(p)}\right\}_{p=p_0} \qquad (45.9).$$

(8). ak je $p = \sigma_0 + j\omega_0$ pólom (nulou) $f(p)$, tak pólom (nulou) je tiež i $p = \sigma_0 - j\omega_0$, čo je dané tým, že $f(p)$ má reálne koeficienty.

(9). Ak je $f(p)$ PRF, je jej reálna časť párnou funkciou, kdežto imaginárna časť $f(p)$ je nepárnou ~~časťou~~ funkciou t.j.

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Re}\left[Z(-j\omega)\right] &= \mathrm{Re}\left[Z(j\omega)\right] \\ \mathrm{Im}\left[Z(-j\omega)\right] &= -\mathrm{Im}\left[Z(j\omega)\right] \end{aligned}\right\} \qquad (46.9)$$

(10) Stupne polynómov čitateľa a menovateľa imitančnej ~~prenosovej~~ fcie sa môžu líšiť najviac o jednotku, t.j.

~~10.3. Vlastnosti reálnej a imaginárnej časti impedancie pasívnej dvojpólu~~

—

0.3. Vzťah medzi reálnou a imaginárnou časťou impedancie pasívneho dvojpólu.

Uvažujme impedanciu $Z(p)$. Potom pre $p=j\omega$ možno $Z(j\omega)$ vyjadriť v tomto tvare

$$Z(j\omega)=A(\omega)+jB(\omega) \qquad (47.9)$$

Z posledne uvedeného vzťahu je zrejmé, že $A(\omega)$ reprezentuje reálnu časť impedancie $Z(j\omega)$ a $B(\omega)$ reprezentuje imaginárnu časť impedancie $Z(j\omega)$. Zaveďme teraz koeficient A_∞ takto:

$$A_\infty=\lim_{\omega\to\infty} Re[Z(j\omega)] \qquad (48.9)$$

t.j. A_∞ je fyzikálne dané reálnou hodnotou impedancie $Z(j\omega)$ pri nekonečne veľkom kmitočte ω. Vychádzajúc z týchto definícií A_∞, $A(\omega)$, $B(\omega)$, je možné ukázať, že medzi reálnou a imaginárnou časťou $Z(j\omega)$ platia tieto vzťahy:

pre $\omega=\omega_0$

$$B(\omega_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A(\omega)}{\omega-\omega_0}\,d\omega \qquad (49.9)$$

$$A(\omega_0)-A_\infty=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{B(\omega)}{\omega-\omega_0}\,d\omega \qquad (50.9)$$

Vzťahy (49.9) a (50.9) sú známe ako Hilbertova transformácia. Z týchto vzťahov plynie, že reálna a imaginárna časť $Z(j\omega)$ nie sú funkcie nezávislé. Ak teda poznáme $A(\omega)$ (resp. $B(\omega)$), tak vychádzajúc zo (49.9) (resp. 50.9), možno vypočítať $A(\omega)$ (resp. $B(\omega)$). Z rovnakého dôvodu, sú na sebe závislé i $|Z(j\omega)|$ a $\arg[Z(j\omega)]$, nakoľko platí:

$$|Z(j\omega)|=\sqrt{A^2(\omega)+B^2(\omega)}\,, \qquad \arctg\frac{B(\omega)}{A(\omega)} \qquad (51.9)$$

(115)

10.4. Rozloženie núl a pólov LC dvojpólov.

Uvažujme reaktančný (LC) dvojpól pozostávajúci (obsahujúci) n-nezávislých slučiek. Potom každý prvok príslušného determinantu Δ sústavy z_{ik} má tvar:

$$z_{ik} = pL_{ik} + p^{-1} D_{ik} \qquad (52.9).$$

Vstupná impedancia je daná vzťahom

$$Z(p) = \frac{\Delta}{\Delta_{11}}$$

Vychádzajúc z úvah uvedených v kapitole (10.2), možno potom pre vstupnú impedanciu písať:

$$Z(p) = \frac{a_{2n}p^{2n} + a_{2n-2}p^{2n-2} + \dots + a_4p^4 + a_2p^2 + a_0}{b_{2n-1}p^{2n-1} + b_{2n-3}p^{2n-3} + \dots + b_5p^5 + b_3p^3 + b_1p} \qquad (53.9).$$

Funkciu $Z(p)$ nazývame reaktančnou funkciou. Podobné úvahy možno urobiť i pre $Y(p)$ (vstupnú admitanciu sústavy). Vychádzajúc z teórie PRF a z kapitoly (10.2.) možno povedať, že imitančné funkcie LC dvojpólov majú tieto vlastnosti:

1. Reaktančná funkcia je nepárna, pretože platí $f(p) = -f(p)$.
2. Pre $p = j\omega$, je rýdzo imaginárna, t.j. $f(j\omega) = jX(\omega)$, kde $X(\omega)$ je reálna funkcia.

2. Nuly a póly reaktančnej funkcie ležia na imaginárnej osi a striedajú sa.

3. Stupeň čitateľa reaktančnej fcie sa líši od stupňa menovateľa vždy o 1. To ale znamená, že pri $p = 0$ a $p \to \infty$ leží vždy nula alebo pól.

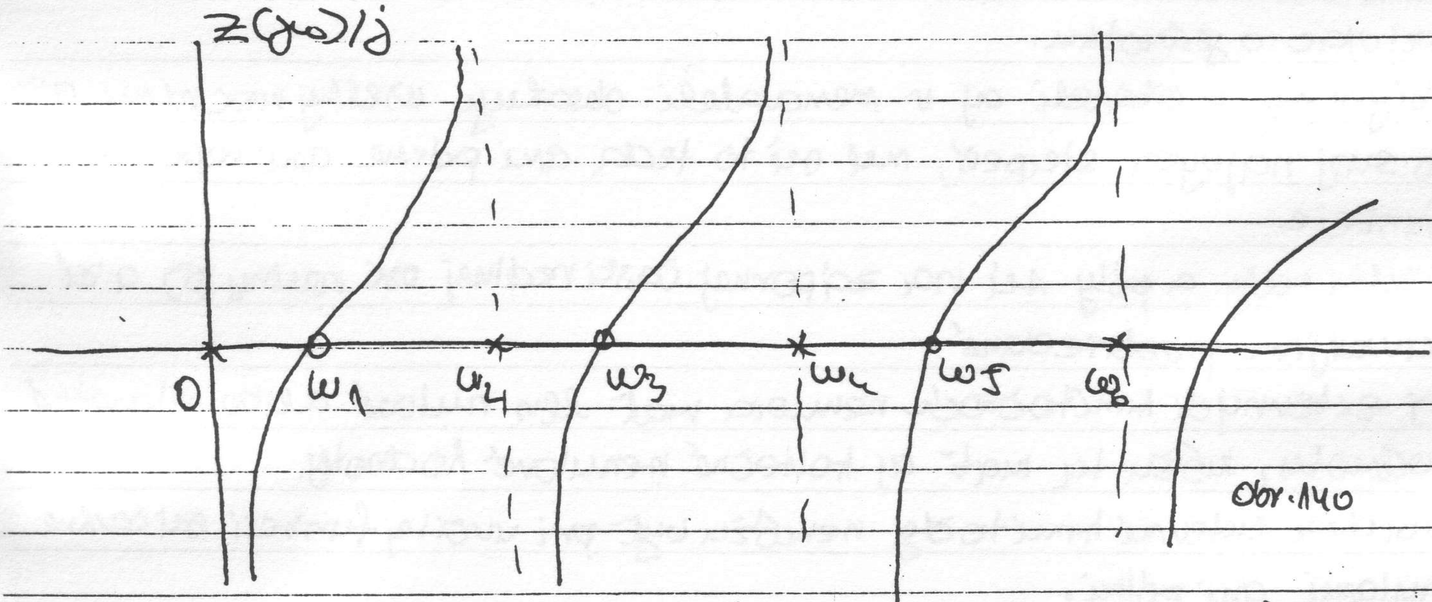
Impedanciu $Z(p)$ môžme vyjadriť vo faktorizovanej forme takto:

$$Z(p) = k \frac{(p^2 - p_1^2)(p^2 - p_3^2) \cdots (p^2 - p_{2n-1}^2)}{p(p^2 - p_2^2)(p^2 - p_4^2) \cdots (p^2 - p_{2n-2}^2)} \qquad (54.9)$$

pre $p = j\omega$ dostávame:

$$Z(j\omega) = k \frac{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_3^2 - \omega^2) \cdots (\omega_{2n-1}^2 - \omega^2)}{j\omega(\omega_2^2 - \omega^2)(\omega_4^2 - \omega^2) \cdots (\omega_{2n-2}^2 - \omega^2)} \qquad (55.9)$$

Vychádzajúc z (55.9) možno graficky závislosť $Z(j\omega)/j$ znázorniť takto:



Obr. 140

Póly ω_2, ω_4 a ω_6 sa nazývajú internými pólmi $Z(j\omega)$, a nuly ω_1, ω_3 a ω_5 sa nazývajú internými nulami $Z(j\omega)$. Póly $\omega = 0$ a $\omega \to \infty$ sa nazývajú externými pólmi.

5. Rozloženie núl a pólov RC obvodov.

Uvažujme ľubovoľne zložitý RC dvojpól, ktorý má n-nezávislých slučiek, pričom každý prvok determinantu príslušnej sústavy rovníc (v našom prípade 27.9.) má tvar:

$$Z_{ij} = R_{ij} + \frac{1}{p} D_{ij} \qquad (56.9.)$$

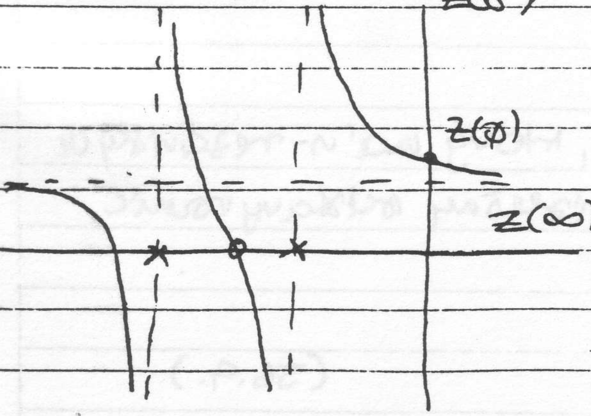
kde, použijúc postup ukázaný v kapitole (10.2.) pre vstupnú impedanciu sústavy dostávame

$$Z(p) = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + b_{n-2} p^{n-2} + \dots + b_2 p + b_1 p} = \qquad (57.9)$$

$$= k \frac{(p+p_1)(p+p_3)\dots(p+p_{2n-1})}{p(p+p_2)(p+p_4)\dots(p+p_{2n-2})} \qquad (57.9)$$

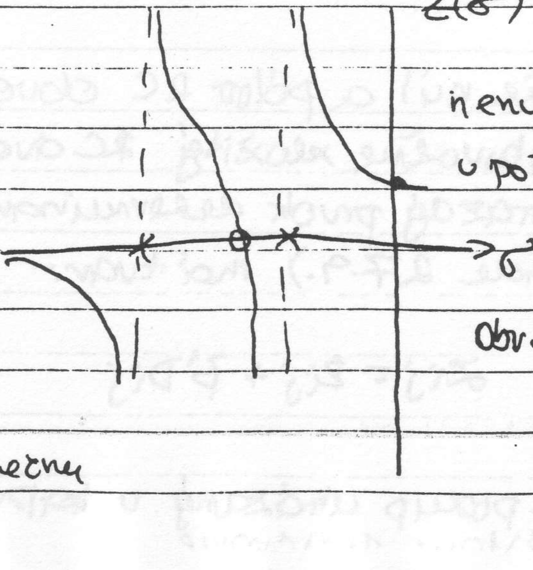
kde $k = a_n/b_m$ je reálne kladné číslo a p_{2k-1} $(k=1,2..n)$ sú nuly a p_{2k} $(k=1,2,\dots n-1)$ sú póly $Z(p)$. Analýzovou vlastností impedančnej funkcii RC obvodov (dvojpólov), možno zistiť, že pasívne RC dvojpóly majú tieto vlastnosti:

1. Stupeň čitateľa môže, ale nemusí sa líšiť od stupňa menovateľa najviac o jednotku.
2. Polynómy v čitateli aj v menovateli obsahujú všetky mocniny až po svoj najvyšší stupeň, nie sú to teda ani párne ani nepárne funkcie.
3. Všetky nuly a póly sú na zápornej časti reálnej osi roviny (p) a sú navzájom prestriedané.
4. Pri extrémnych kmitočtoch nemusia mať len nulové alebo nekonečné hodnoty, môžu tiež mať aj konečné nenulové hodnoty.
5. Obidva extrémne kmitočty nemôžu byť pri určitej funkcii súčasne nulami ani pólmi.
6. Typické priebehy impedančných funkcií RC (alebo admitančných fcií RL):



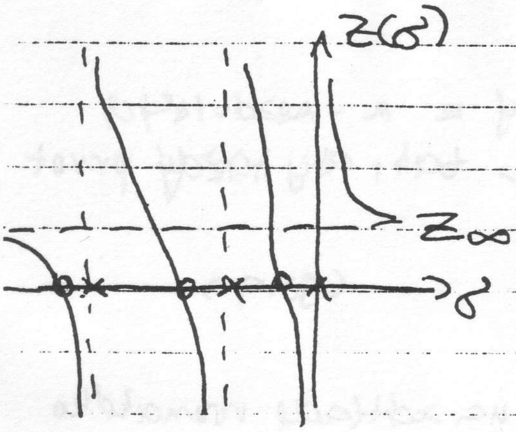
nenulová hodnota v počiatku a nekonečnu

Obr.141

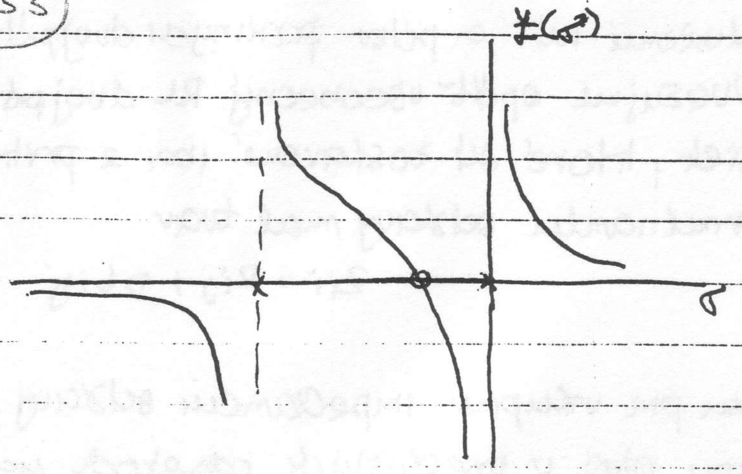


nenulová hodnota v počiatku, nulová v nekonečne.

Obr.142.

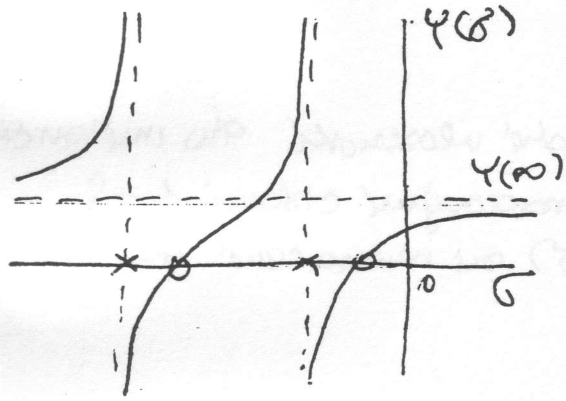


Pól v počiatku, nulová hodnota v nekonečnu.
Obr. 143.

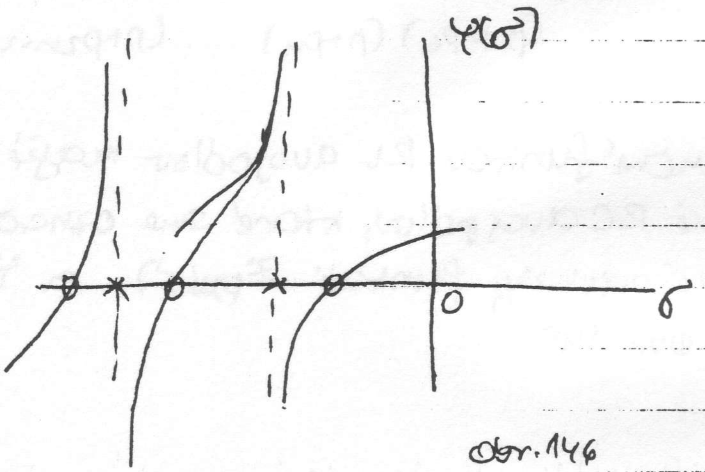


pól v počiatku a nulový bod nekonečnu
obr. 144

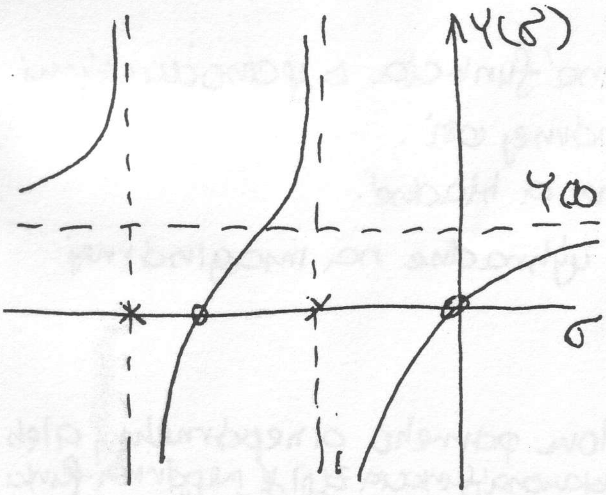
Typické priebehy admitančných funkcií RC alebo impedančných funkcií RL.



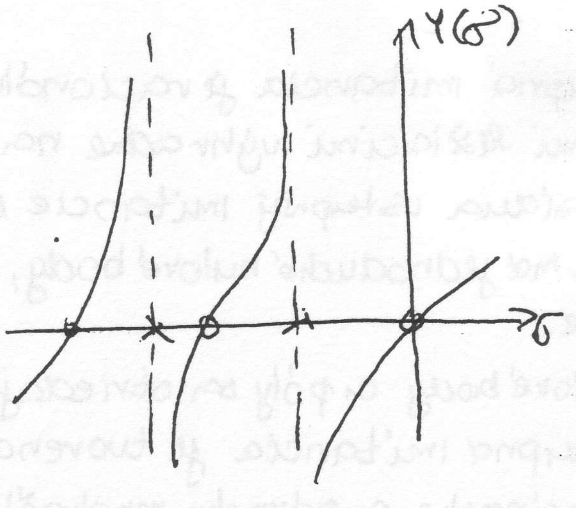
enulová hodnota v počiatku, ulová v nekonečnu. obr. 145



obr. 146
nenulová hodnota v počiatku, pól v ∞.



ulový bod v počiatku, a
nulová hodnota v ∞.
obr. 147



nulový bod v počiatku, pól v nekonečnu
Obr. 148.

10.6.

Rozloženie núl a pólov pasívnych dvojpólov RL.

Uvažujme opäť všeobecný RL dvojpól, zložený z n - nezávislých slučiek, ktoré sú zostavené iba z prvkov R a L tak, aby každý prvok determinantu sústavy mal tvar

$$z_{ij} = R_{ij} + pL_{ij} \qquad (58.9)$$

Potom pre vstupnú impedanciu sústavy, možno na základe rovnakého postupu ako v predošlých odsekoch napísať tieto výrazy.

$$Z(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_{m-1} p^{m-1} + a_{m-2} p^{m-2} + \dots + a_1 p + a_0} =$$

$$= k \frac{(p+p_1)(p+p_3)\dots(p+p_{2n-1})}{(p+p_2)(p+p_4)\dots(p+p_{2n-2})} \qquad (59.9)$$

Imitančné funkcie RL dvojpólov majú rovnaké vlastnosti ako imitančné funkcie RC dvojpólov, ktoré sme označili poradovými číslami 1.-5. Typické priebehy funkcií $Z_{RL}(\sigma)$ a $Y_{RL}(\sigma)$ sú naznačené na obr. 141 ÷ obr. 148.

11.4. [illegible] vlastnosti [illegible] dvojpólov [illegible] ideálnymi akumulačnými prvkov.

[illegible]

1. Vstupná imitancia je racionálna lomená funkcia s jednoduchými pólmi ležiacimi výhradne na imaginárnej osi.
2. Rezíduá vstupnej imitancie sú reálne a kladné.
3. VI má jednoduché nulové body, ležiace výhradne na imaginárnej osi.
4. Nulové body a póly sa striedajú.
5. Vstupná imitancia je tvorená podielom párneho a nepárneho, alebo nepárneho a párneho mnohočlena. Reaktančná funkcia Z(p) je nepárna funkcia pre p=jω je rýdzo-imaginárna
6. Derivácia reaktancie alebo susceptancie podľa ω je vždy kladná

OBVODY RL A RC.

$Z_{RC}(p)$ a $Y_{RL}(p)$

1. Sú racionálne lomené funkcie s jednoduchými pólmi, ležiacimi na zápornej časti reálnej osi.
2. Rezíduá $Z_{RC}(p)$ a $Y_{RL}(p)$ sú vo všetkých póloch kladné.
3. V nekonečne neleží pól.
4. Jednoduché nulové body ležia na zápornej časti reálnej osi.
5. Nulové body a póly sa striedajú.
6. Prvý význačný bod na reálnej osi, počítajúc od počiatku, je pól.

Fcie $Y_{RC}(p)$ a $Z_{RL}(p)$:

1. Sú racionálne lomené funkcie s jednoduchými pólmi, ležiacimi na zápornej časti reálnej osi.
2. Rezíduá funkcií $Z_{RL}(p)/p$ a $Y_{RL}(p)/p$ sú kladné
3. V bode p neleží pól
4. Jednoduché nulové body ležia na zápornej časti reálnej osi.
5. Nulové body a póly sa striedajú
6. Prvý význačný bod na reálnej osi, počítajúc od počiatku je nulový bod.

Na základe vlastností LC dvojpólov, ktoré sme opísali v predošlých kapitolách, vieme, že pre vstupnú impedanciu LC dvojpólu platí:

$$Z(p)=\frac{k}{p}\,\frac{b_0+b_2p^2+b_4p^4\cdots}{a_1+a_3p^2+a_5p^4+\cdots}=\frac{(p^2+\omega_1^2)(p^2+\omega_3^2)(p^2+\omega_5^2)\cdots}{(p^2+\omega_2^2)(p^2+\omega_4^2)(p^2+\omega_6^2)\cdots}\,\frac{k}{p} \qquad (60.10)$$

Uvedenú racionálne lomenú funkciu možno rozložiť na parciálne zlomky takto:

$$Z(p)=\frac{k_0}{p}+k_\infty p+\sum_{i=1}^{n}\frac{2k_{2i}p}{p^2+\omega_{2i}^2} \qquad i=0,2,4\dots,2n-2 \qquad (61.10)$$

kde k_0, k_∞ a k_{2i} sú v skôr citovanom zmysle rezíduá impedančnej funkcie v príslušných póloch a ako také sú nezáporné. Reziduá určíme podľa rovníc:

$$
\left.
\begin{aligned}
k_0 &= Z(p)\cdot p\,\big|_{p=0} \\
k_\infty &= \lim_{p\to\infty} \frac{Z(p)}{p} \\
2k_{2i} &= \left[Z(p)\,\frac{p^2+\omega_{2i}^2}{p} \right]_{p^2=-\omega_{2i}^2}
\end{aligned}
\right\} \qquad (62.10)
$$

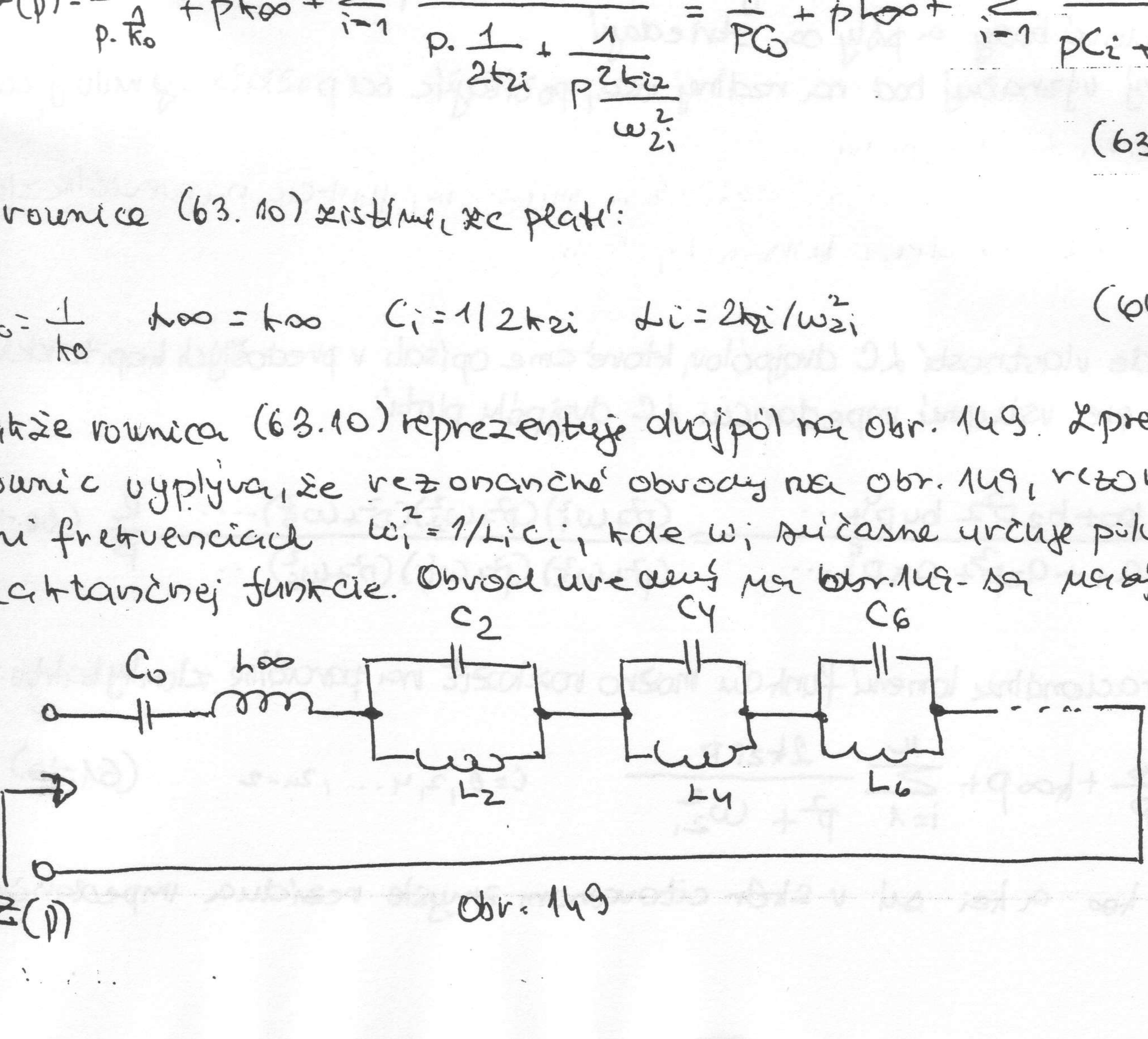
Funkcia $Z(p)$ je vo vzťahu (61.10) rozložená na súčet dielčich funkcií $Z_i(p)$. To znamená, že predstavuje do série spojené dvojpóly s impedanciami $Z_i(p)$. Ďalej je zrejmé, že tiež dielčie funkcie $Z_i(p)$ sú PRF. Fyzikálny zmysel (61.10) vnímame lepšie, ak (61.10), upravíme do tvaru

$$
Z(p) = \frac{1}{p\cdot\frac{1}{k_0}} + pk_\infty + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p\cdot\frac{1}{2k_{2i}} + \frac{1}{p\frac{2k_{2i}}{\omega_{2i}^2}}} = \frac{1}{pC_0} + pL_\infty + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{pC_i + \frac{1}{pL_i}} \qquad (63.10)
$$

Z rovnice (63.10) zistíme, že platí:

$$
C_0 = \frac{1}{k_0} \qquad L_\infty = k_\infty \qquad C_i = 1/2k_{2i} \qquad L_i = 2k_{2i}/\omega_{2i}^2 \qquad (64.10)
$$

takže rovnica (63.10) reprezentuje dvojpól na obr. 149. Z predošlých rovníc vyplýva, že rezonančné obvody na obr. 149, rezonujú pri frekvenciách $\omega_i^2 = 1/L_iC_i$, kde ω_i súčasne určuje polohu pólu reaktančnej funkcie. Obvod uvedený na obr. 149 sa nazýva



Obr. 149

V predchádzajúcom výklade sme sa oboznámili s vetou, že PRF je i prevrátená hodnota PRF. Admitancia je teda tiež PRF. Rozviňme výraz admitancie zodpovedajúcu impedancii $Z(p)$ (60.10) na súčet parciálnych zlomkov. Potom dostávame:

$$Y(p) = Z^{-1}(p) = \frac{k_0}{p} + p k_\infty + \sum_{i=1}^{m} \frac{2 k_{2i+1} p}{p^2 + \omega_{2i+1}^2} \qquad (65.10)$$

Jednotlivé zložky (65.10) teraz reprezentujú admitancie, ktoré sú spojené paralelne. Rezíduá k_0, k_∞ a k_{2i+1} vypočítame podľa vzťahu

$$k_0 = [pY(p)]_{p=0} \qquad k_\infty = \lim_{p \to \infty} [Y(p)/p] \qquad 2k_{2i+1} = \left[Y(p)(p^2+\omega_{2i+1}^2)/p\right]_{p^2=-\omega_{2i+1}^2} \qquad (66.10)$$

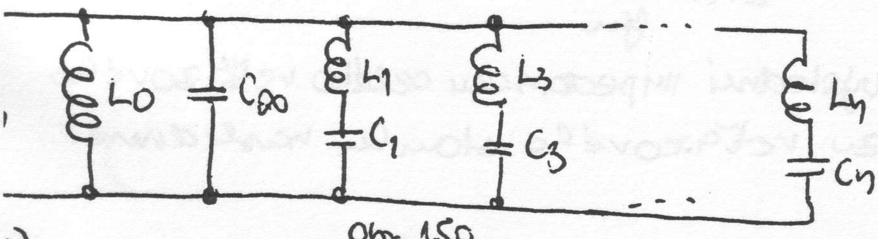
Rovnicu (65.10) možno upraviť na tento tvar:

$$Y(p) = \frac{1}{p\frac{1}{k_0}} + p k_\infty + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{p\frac{1}{2k_{2i+1}} + \frac{1}{p\frac{2k_{2i+1}}{\omega_{2i+1}^2}}} = \frac{1}{pL_0} + pC_\infty + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{pL_i + \frac{1}{pC_i}} \qquad (67.10)$$

Takže medzi stavebnými prvkami kanonického reaktančného dvojpólu na obr. 150 a rezíduami $Y(p)$ platia vzťahy:

$$L_0 = 1/k_0 \qquad L_i = 1/2k_{2i+1} \qquad C_\infty = k_\infty \qquad C_i = 2k_{2i+1}/\omega_{2i+1}^2 \qquad (67.10).$$

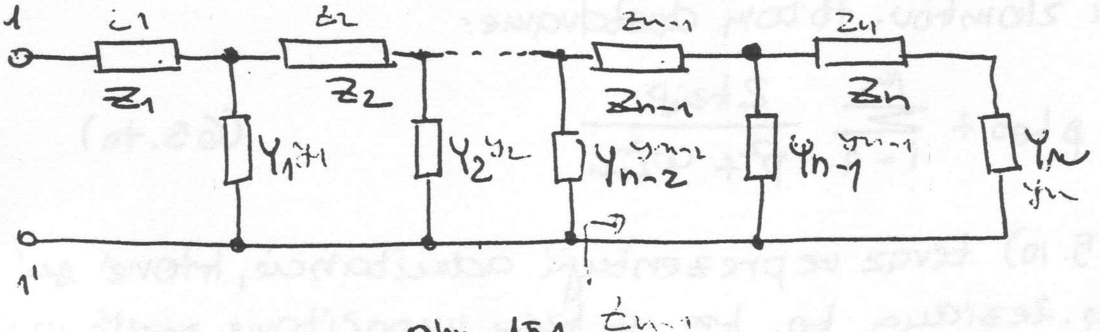
Dvojpól, uvedený na obr. 150, ktorý obdržíme na báze vzťahu (67.10) sa nazýva 2. Fosterov kanonický reaktančný dvojpól. Na záver tohoto odseku poznamenávame, že o realizácii v tzv. kanonických tvaroch hovoríme vtedy, ak syntetizované dvojpóly sú realizované s najmenším možným počtom elektronických prvkov.



Obr. 150

10.2 Syntéza dvojpólu LC rozkladom impedančnej funkcie na reťazový zlomok.

Skôr ako budeme pokračovať v štúdiu ďalších vlastností reaktančných dvojpólov, pozrime sa na zapojenie podľa obr. 151.



Obr. 151

Takýto útvar nazývame reťazovým (priečkovým) dvojpólom. V pozdĺžnych vetvách dvojpólu sú označené impedancie $z_1, z_2 \dots, z_n$, a v priečnych vetvách zasa admitancie $y_1, y_2, \dots, y_n$. Pre impedanciu poslednej dvojice prvkov z_n, y_n možno vyjadriť takto:

$$Z_n = z_n + \frac{1}{y_n} \qquad (68.10)$$

Pre admitanciu y_{n-1}, $z_n + \frac{1}{y_n}$ platí

$$Y_{n-1} = y_{n-1} + \frac{1}{Z_n} = y_{n-1} + \frac{1}{z_n + \frac{1}{y_n}} \qquad (69.10)$$

Impedanciu Z_{n-1} vyznačenú na obr. 151 môžeme vyjadriť takto:

$$Z_{n-1} = z_{n-1} + \frac{1}{Y_{n-1}} = z_{n-1} + \cfrac{1}{y_{n-1} + \cfrac{1}{z_n + \cfrac{1}{y_n}}} \qquad (70.10)$$

Na základe uvedeného môžeme výslednú impedanciu celého reťazového dvojpólu napísať v tvare tzv. reťazového zlomku nasledovne:

$$Z = z_1 + \cfrac{1}{y_1 + \cfrac{1}{z_2 + \cfrac{1}{y_2 + \cdots}}}$$

(71.10)

$$+ \cfrac{1}{z_{n-1} + \cfrac{1}{y_{n-1} + \cfrac{1}{z_n + \cfrac{1}{y_n}}}}$$

z úsporu miesta sa niekedy používa nasledujúce označenie reťazového zlomku:

$$= z_1 + \frac{1|}{|y_1} + \frac{1|}{|z_2} + \frac{1|}{|y_2} + \cdots + \frac{1|}{|z_{n-1}} + \frac{1|}{|y_{n-1}} + \frac{1|}{|z_n} + \frac{1|}{|y_n} \qquad (72.10)$$

zásade sú dva možné spôsoby rozloženia impedančnej funkcie na reťazový zlomok:

Delením mnohočlenov čitateľa a menovateľa tak, že deliť začíname členy s najvyššími mocninami premennej p. Takto získanému obvodu hovoríme 1. Cauerov kanonický tvar.

. Delením mnohočlenov čitateľa a menovateľa, pričom deliť začíname členy s najnižšími mocninami premennej p. Takto získanému obvodu hovoríme 2. Cauerov kanonický tvar.

vý kanonický tvar realizácie reaktančnej funkcie dostaneme na základe rovnice

$$Z(p) = \frac{a_{2n}p^{2n} + a_{2n-2}p^{2n-2} + \cdots + a_2p^2 + a_0}{b_{2n-1}p^{2n-1} + b_{2n-3}p^{2n-3} + \cdots + b_3p^3 + b_1p} \qquad (73.10)$$

prezentujúcej vstupnú impedanciu LC dvojpólu. Začnime teraz realizovať delenie čitateľa menovateľom od najvyšších mocnín. prvom kroku dostaneme:

$$Z(p) = \frac{a_{2n}}{b_{2n-1}}p + Z_1(p) = L_1(p) + Z_1(p) \qquad (74.10)$$

kde $Z_1(p)$ je zvyšok, ktorý má v čitateli mnohočlen (2n-2)-ho a v menovateli jeden (2n-1)-ho stupňa. Aby sme mohli pokračovať v delení od najvyšších mocnín, vezmeme recipročnú hodnotu, pre ktorú po ďalšom kroku dostávame:

$$Y_1(p) = \frac{1}{Z_1(p)} = \frac{b_{2n-1}}{a'_{2n-2}} p + Y_2(p) = C_2 p + Y_2(p) \qquad (75.10)$$

Získaný zvyšok je teraz v čitateli (2n-3)-ho stupňa a v menovateli (2n-2)-ho stupňa. Po recipročnosti a delení dostaneme:

$$Z_2(p) = \frac{1}{Y_2(p)} = \frac{a'_{2n-2}}{b'_{2n-3}} p + Z_3(p) = L_3 p + Z_3(p) \qquad (76.10)$$

$$\vdots$$

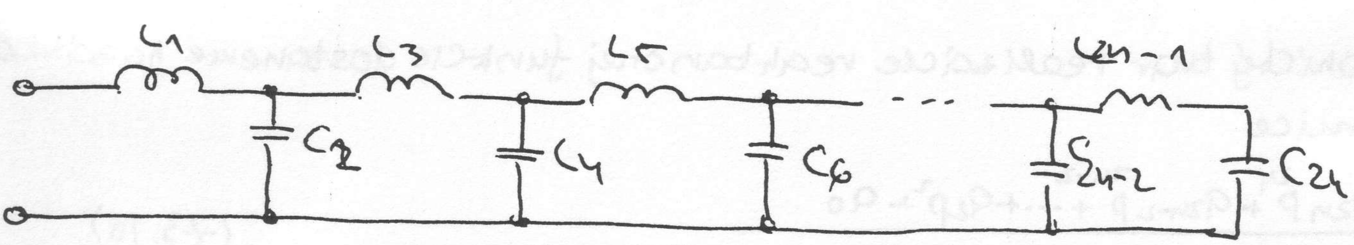
$$Z_{(2n-2)} = L_{2n-1} p + Z_{2n-1}$$

$$Y_{2n-1} = C_{2n} p$$

V poslednom kroku dostávame nulový zvyšok, čo dokazuje, že vstupnú impedanciu reaktančného dvojpólu možno vyjadriť reťazovým zlomkom tvaru:

$$Z(p) = L_1 p + \frac{1|}{|pC_2} + \frac{1|}{|pL_3} + \frac{1|}{|pC_4} + \dots + \frac{1|}{|L_{2n-1}p} + \frac{1|}{|C_{2n}p} \qquad (77.10)$$

ect tento vzťah porovnáme, s výrazom (42.10), môžeme zostaviť realizáciu danej reaktančnej funkcie v priečkovom tvare, ktorý je na obr. 152



obr. 152

(Cauerov)

Druhý kanonický tvar reaktančného dvojpólu získame podobne ako 1. Cauerov kanonický tvar, postupným delením. Rozdiel je však v tom, že teraz postupujeme pri delení od najnižších mocnín. Po prvom kroku dostaneme:

$$Z(p) = \frac{a_0}{b_1} p^{-1} + Z_1(p) = \frac{1}{pC_1} + Z_1(p) = \frac{1}{pC_1} + \frac{1}{Y_1(p)} \qquad (78.10)$$

s reciprokácií opäť pokračujeme od najvyšších mocnín:

$$Y_1(p) = \frac{b_1}{a_2'} p^{-1} + Y_2(p) = \frac{1}{pL_2} + \frac{1}{Z_2(p)}$$

$$Z_2(p) = \frac{a_2'}{b_3'} p^{-1} + Z_3(p) = \frac{1}{pC_3} + \frac{1}{Y_3(p)} \qquad (79.10)$$

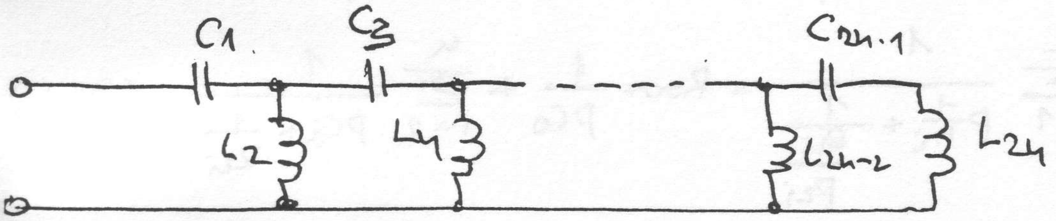
$$\vdots$$

$$Y_{2n-1}(p) = \frac{1}{L_{2n} \cdot p}$$

Výsledok možno vyjadriť v tvare reťazového zlomku

$$Z(p) = C_1^{-1} p^{-1} + \frac{1}{L_2^{-1} p^{-1}} + \frac{1}{C_3^{-1} p^{-1}} + \frac{1}{L_4^{-1} p^{-1}} + \dots + \frac{1}{C_{2n-1}^{-1} p^{-1}} + \frac{1}{L_{2n}^{-1} p^{-1}} \qquad (80.10)$$

ktorý zodpovedá realizácii podľa obr. 153.



obr. 154

Odpoveď na otázku, pre ktorý z realizačných postupov sa máme rozhodnúť, nie je jednoznačná, pretože veľa záleží na tom, ako a v akom tvare je zadaná impedančná funkcia. Z hľadiska praxe je účelné v každom prípade určiť všetky štyri kanonické tvary a použiť ten, ktorý má súčiastky o najpriaznivejšími veľkosťami.

7. Syntéza RC dvojpólov

Dvojpóly zostavené z reálnych rezistorov a kapacitorov sa používajú v mnohých oznamovacích zariadeniach. Ich výhodou je malá hmotnosť, malý priestor (v porovnaní s LC dvojpólmi), nižšia cena a ľahšia výroba. V ostatnej dobe v ich prospech hovorí aj možnosť výroby mikroelektronickými technológiami.

10.7.1. Syntéza RC dvojpólov rozkladom imitančnej funkcie na čiastkové zlomky (1. a 2. Fosterov kanonický tvar).

Impedancia RC dvojpólu je v najvšeobecnejšom prípade daná lomenou racionálnou funkciou o reálnymi a konštantnými koeficientami, kde sa stupne polynómov čitateľa a menovateľa môžu líšiť najviac o jednotku. Impedanciu $Z(p)$ RC dvojpólu, možno potom vyjadriť v tvare súčtu parciálnych zlomkov takto:

$$Z(p) = h_\infty + \frac{h_0}{p} + \sum_{i=1}^{n} \frac{h_i}{p+p_{2i}} \qquad (81.10)$$

de:

$$h_\infty = \lim_{p\to\infty} Z(p) \qquad h_0 = [p\,Z(p)]_{p=0} \qquad h_i = [(p+p_{2i})\,Z(p)]_{p=-p_{2i}} \qquad (82.10)$$

yzikálny zmysel (81.10) vynikne lepšie, ak tento vzťah upravíme do tvaru

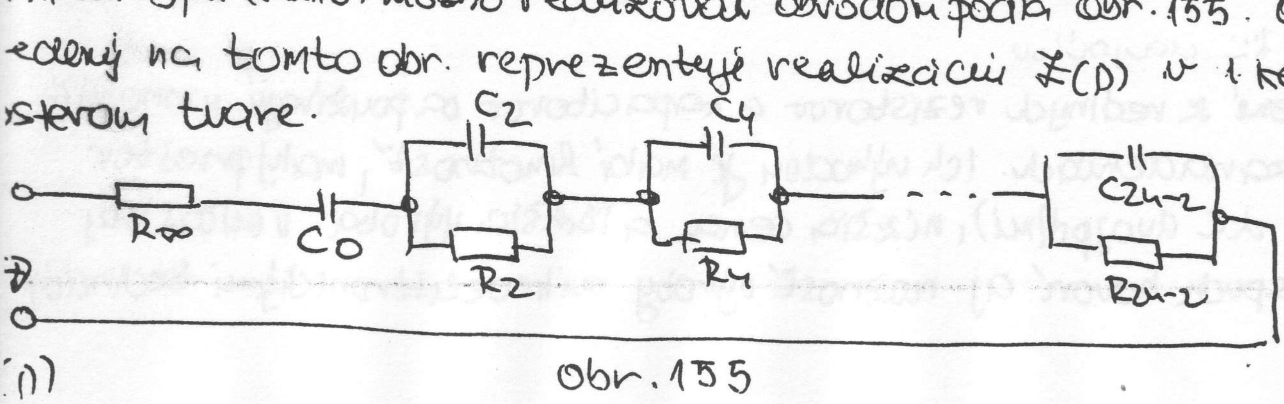
$$Z(p) = h_\infty + \frac{1}{p\frac{1}{h_0}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p\frac{1}{h_i} + \frac{1}{\frac{h_i}{p_{2i}}}} = R_\infty + \frac{1}{pC_0} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{pC_i + \frac{1}{R_{2i}}} \qquad (83.10)$$

posledného vzťahu vidíme, že platí:

$$R_\infty = h_\infty \qquad C_0 = \frac{1}{h_0} = \left[\frac{1}{p\,Z(p)}\right]_{p=0} \qquad C_i = \frac{1}{h_{2i}} = \left[\frac{1}{Z(p)\,(p+p_{2i})}\right]_{p=-p_{2i}}$$

$$R_{2i} = \frac{h_{2i}}{p_{2i}} = \frac{1}{p_{2i} C_i} \qquad (84.10)$$

ntanciu typu (83.10) možno realizovať obvodom podľa obr. 155. Obvod edený na tomto obr. reprezentuje realizáciu $Z(p)$ v 1. kanonickom osterovom tvare.



Obr. 155

...izácii v 2. kanonickom tvare získame z ~~výrazu~~ admitancie $Y(p)=1/Z(p)$ ktorú vyjadríme v tvare:

$$Y(p) = h_0 + p h_\infty + p\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{p+p_i} = h_0 + p h_\infty + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\frac{1}{h_i}+\frac{1}{p\frac{h_i}{p_i}}} \qquad (85.10)$$

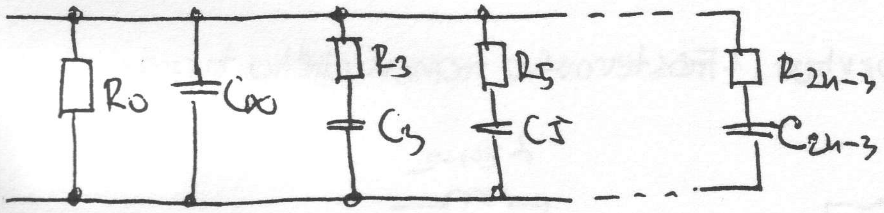
$$= \frac{1}{R_0} + pC_\infty + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R_i+\frac{1}{pC_i}} \qquad (86.10)$$

...e:

$$R_0 = \left[\frac{1}{Y(p)}\right]_{p=0} = \left[Z(p)\right]_{p=0} \qquad C_\infty = \left[\frac{Y(p)}{p}\right]_{p\to\infty} = \left[\frac{1}{pZ(p)}\right]_{p\to\infty}$$

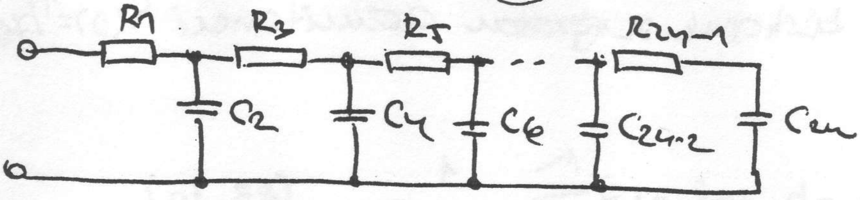
$$R_i = \left[\frac{p}{(p+p_i)Y(p)}\right]_{p=-p_i} = \left[\frac{pZ(p)}{p+p_i}\right]_{p=-p_i} \qquad C_i = \frac{1}{p_iR_i} \qquad (87.10)$$

...lekané zapojenie obvodu, ktoré je známe ako realizácia RC obvodu v Fosterovom kanonickom tvare je naznačené na obr. 156.

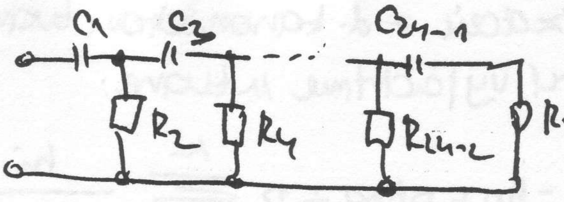


obr. 156.

...stavu RC dvojpólu v 1. a 2. Cauerovom kanonickom tvare dostaneme ...upným delením mnohočlenov $Z(p)$ od najvyšších, resp. najnižších moc... Na obr. 157 je zapojenie zodpovedajúce 1. na obr. 158. 2. Cauerovmu kanonickému tvaru. Uvedené postupy nepotrebujú ďalší výklad.



obr. 157



obr. 158.

10.8. Syntéza RL dvojpólov

Pri realizácii RL dvojpólov postupujeme analogicky ako pri realizácii LC alebo RC dvojpólov. Budeme tu vychádzať z toho, že impedanciu $Z(p)$ vyjadríme v tvare

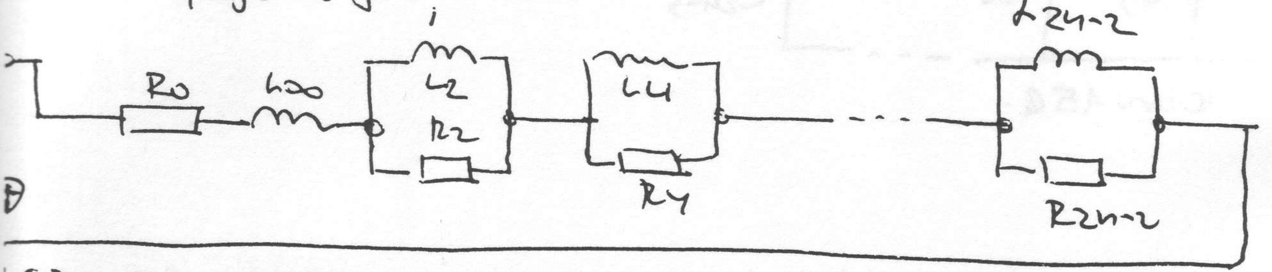
$$Z(p) = k_0 + p k_\infty + p \sum_{i=1}^{m} \frac{k_i}{p+p_i} = R_0 + pL_\infty + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\frac{1}{R_i} + \frac{1}{pL_i}} \qquad (88.10)$$

kde

$$R_0 = k_0 \quad L_\infty = k_\infty \quad R_i = k_i = \left[\frac{Z(p)(p+p_i)}{p}\right]_{p=-p_i} \quad L_i = \frac{k_i}{p_i} = \frac{R_i}{p_i}$$

$$R_0 = Z(p)|_{p=0} \quad L_\infty = \lim_{p\to\infty} \frac{Z(p)}{p} \qquad (89.10)$$

Vzorce (89.10) slúžia pre výpočet prvkov 1. Fosterovho kanonického tvaru, ktorého zapojenie je na obr. 159.



obr. 159

Pri druhom kanonickom tvare vyjdeme z funkcie $Y(p)$, ktorú môžeme rozložiť na tvar

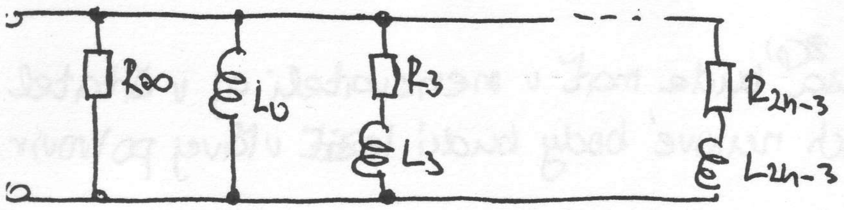
$$Y(p) = k_\infty + \frac{k_0}{p} + \sum_{i=1}^{m} \frac{k_i}{p+p_i} = \frac{1}{R_\infty} + \frac{1}{pL_0} + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{R_i + pL_i} \qquad (90.10)$$

kde:

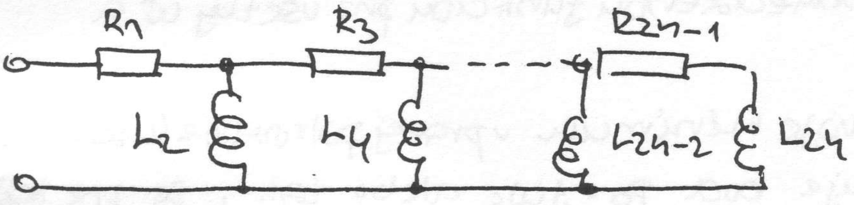
$$R_\infty = \frac{1}{k_\infty} = \frac{1}{\lim_{p\to\infty} Y(p)} \quad L_0 = \frac{1}{k_0} = \frac{1}{[pY(p)]_{p=0}} \quad L_i = \left[\frac{1}{Y(p)(p+p_i)}\right]_{p=-p_i}$$

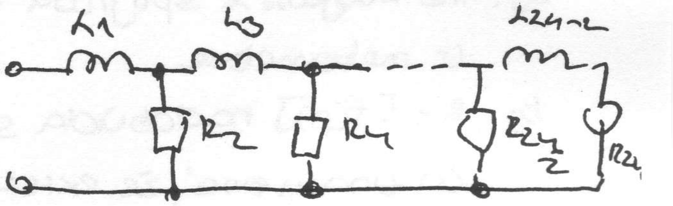
$$R_i = \frac{p_i}{k_i} = p_i L_i \qquad (91.10)$$

odpovedajúce zapojení 2. Fosterovho kanonického tvaru je na obr. 160.


Obr. 160.

1. a 2. Cauerov kanonický tvar dostaneme rozkladom impedančnej funkcie na reťazové zlomky. Zodpovedajúce zapojenie je na obr. 161 a obr. 162.

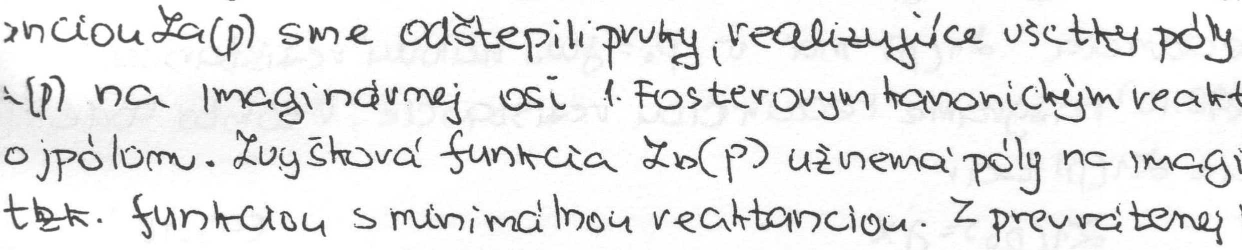

Obr. 161


Obr. 162.

Brunova syntéza RLC dvojpólov

Pri realizácii RLC dvojpólov sa budeme snažiť danú funkciu rozčleniť dielčie časti, realizácia ktorých je ľahšia ako bezprostredná realizácia celej imitančnej funkcie. Základný význam tu má redukcia reaktancie obecného dvojpólu odstránením pólov impedancie na imaginárnej osi, alebo redukcia susceptancie spočívajúca v odstránení nulových bodov na imaginárnej osi.

Konštrukcia dvojpólov z minimálnou reaktanciou a minimálnou susceptanciou je naznačená na obr. 163. Z pôvodného dvojpólu s impedanciou $Za(p)$ sme odštepili prvky realizujúce všetky póly impedancie $Z(p)$ na imaginárnej osi 1. Fosterovým kanonickým reaktančným dvojpólom. Zvyšková funkcia $Zb(p)$ už nemá póly na imaginárnej osi a teda je funkciou s minimálnou reaktanciou. Z prevrátenej hodnoty impedancie $Zb(p)$ odštiepime druhý kanonický reaktančný dvojpól (2. Fosterov kanonický tvar), ktorým realizujeme nulové body impedančnej fce $Z(p)$, ktoré ležia na imaginárnej osi komplexnej premennej p. Admitancia $Zb'(p)$ má minimálnu susceptanciu.


Obr. 163

Naznačený postup striedame tak dlho, kým zvyšková funkcia nemá póly ani nulové body na imaginárnej osi čiže impedanciou s neminimálnou reaktanciou a susceptanciou.

Zvyšková impedančná funkcia $Z(p)$ bude mať v menovateli aj v čitateli mnohočleny rovnakého stupňa. Ich nulové body budú ležať v ľavej polrovine komplexnej roviny p.

O impedančnej funkcii platí nasledovná veta:

Ak je f(p) PRF, potom:

a). Re [f(jω)] je spojitou obmedzenou funkciou pre všetky ω a v nekonečne

b). Re [f(p)] nadobúda svoje minimum v pravej polrovine (uzavretej) čo znamená, že existuje bod $p_0 = j\omega_0$ alebo tak, že pre každé p, z otvorenej pravej polroviny platí

$$\mathrm{Re}[f(p_0)] < \mathrm{Re}[f(p)] \tag{91.10}$$

keď vylúčime triviálne prípady.

c). Ak je R hodnota tohoto minima, potom je to reálna kladná konštanta a pozitívne reálnej funkcii f(p)−R mizne reálna časť práve v bode p_0, pričom f(p)−R je opäť PRF

Ak budeme teraz uvažovať impedančnú funkciu Z(p) s minimálnou reaktanciou a minimálnou susceptanciou z obr. 164, potom podľa predošlej vety je:

$$Z_1(p) = Z(p) - R \tag{92.10}$$

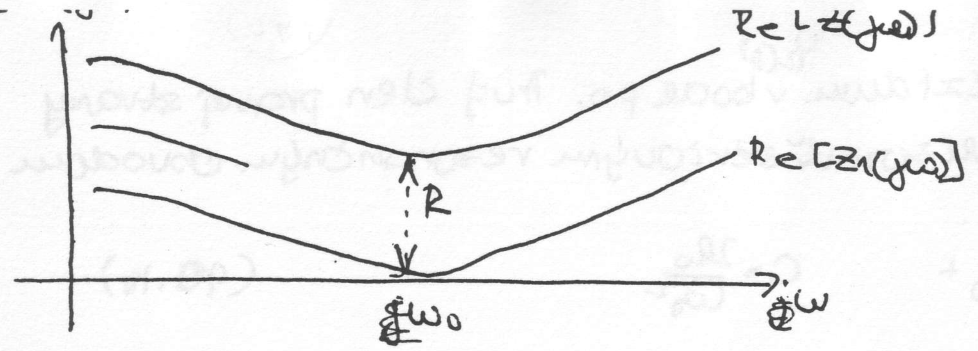
opäť PRF. Impedancia $Z_1(p)$ má v $p_0 = j\omega_0$ nulovú rezistanciu a postup daný (92.10) nazývame redukciou rezistancie. V tomto bode má impedancie $Z_1(p)$ tvar

$$Z_1(p_0) = jX \tag{93.10}$$

kde X je konečné reálne číslo.

Na obr. 164 je postup redukcie rezistancie naznačený graficky. Vpravo je naznačená spojitá obmedzená párna fcia Re[Z(jω)] s minimom R v bode $p_0 = j\omega_0$, ďalej je tu nakreslený priebeh fcie Re[Z(jω)]−R, ktorý má nulový bod v $p_0 = j\omega_0$. Pre zvyškovú impedančnú fciu teda platí $\mathrm{Re}[Z_1(j\omega_0)] \geq 0$ a teda $Z_1(p) \in$ PRF.

Pokúsme sa teraz impedančnú funkciu $Z_1(p)$ realizovať a postupujme podľa Bruneho.



obr. 164

Najskôr predpokladajme, že v rovnici (93.10) platí $X<0$, $\omega_0>0$. Rozložme $Z_1(p)$ na dve časti:

$$Z_1(p) = Z_2(p) + pL_I \qquad (94.10)$$

takže v bode $p_0 = j\omega_0$ bude platiť

$$Z_1(p_0) = Z_2(j\omega_0) + j\omega_0 L_I = jX \qquad (95.10)$$

Predpokladajme, že $\quad Z_2(j\omega_0) = 0$

Potom z (95.10) pre L_I dostávame:

$$L_I = \frac{X}{\omega_0} \qquad (96.10)$$

budeme zaskočení skutočnosťou, že $L_I<0$, pretože $X<0$. Ďalej uvidíme, že existuje možnosť realizovať záporný induktor.

Z rovnice (94.10) potom vypočítame:

$$Z_2(p) = Z_1(p) - pL_I \qquad (97.10)$$

kde $Z_2(p)$ je PRF lebo $-L_I>0$. Pri odvodzovaní (96.10) sme predpokladali, že p_0 je nulový bod $Z_2(p)$. Preto admitanciu $Y_2(p)$ môžeme rozložiť na tento tvar:

$$Y_2(p) = \frac{2k_0 p}{p^2+\omega_0^2} + Y_3(p) \qquad (98.10)$$

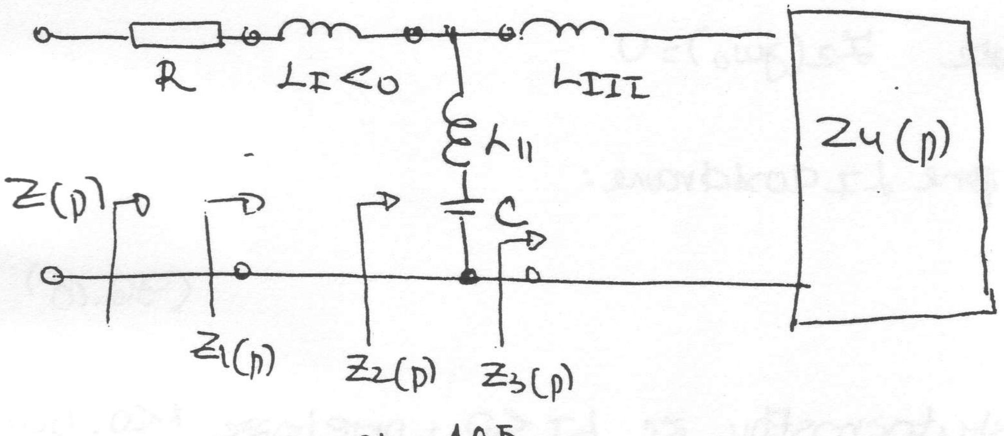
kde ρ_0 je kladné reziduum $Y_2(p)$ v bode p_0. Prvý člen pravej strany rovnice môžeme realizovať sériovým rezonančným obvodom s prvkami

$$L_{II} = \frac{1}{2\rho_0} \qquad C = \frac{2\rho_0}{\omega_0^2} \qquad (99.10)$$

Z rovnice (97.10) vidíme, že $Z_1(p)$ má v nekonečnu pól. Prvý člen rovnice (98.10) má v nekonečnu nulový bod admitancie, a teda pól impedancie. Preto musí mať v nekonečnu pól i impedancia $Z_3(p)$. Pól v nekonečnu tejto impedancii vytvorí sériový induktor L_{III}, teda

$$Z_3(p) = pL_{III} + Z_4(p) \qquad (100.10)$$

Impedancia $Z_4(p)$ je nižšieho stupňa ako impedancia $Z(p)$ je tiež PRF. Uvedený postup realizuje $Z(p)$ spôsobom, uvedeným na Obr. 165. Naznačený realizačný postup spočíva v umelom vytvorení nulového bodu impedančnej funkcie na imaginárnej osi, ktorý nepriamo realizujú súčiastkami L_I, L_{II}, L_{III} a C. Preto je potrebné zistiť, či medzi týmito prvkami neexistuje nejaký vzťah.



Obr. 165

Do rovnice pre $Y_2(p)$ (98.10) dosaďme (99.10) a (100.10) vynásobme ju p a počítajme limitu $p \to \infty$. Dostaneme:

$$pY_2(p) = \frac{2\rho_0 p^2}{p^2+\omega_0^2} + pY_3(p) = \frac{1}{\frac{1}{2\rho_0} + \frac{\omega_0^2}{2\rho_0 p^2}} + \frac{p}{pL_{III} + Z_4(p)} =$$

$$= \frac{1}{L_{II} + \frac{1}{Cp^2}} + \frac{1}{L_{III} + \frac{Z_4(p)}{p}} \qquad (101.10)$$

$$pY_2(p) = \frac{p}{Z_1(p) - pL_I} = \frac{1}{\frac{Z_1(p)}{p} - L_I} \qquad (102.10)$$

$$\lim_{p\to\infty} pY_2(p) = -\frac{1}{L_I} \quad (102.10) \qquad \lim_{p\to\infty} pY_2(p) = \frac{1}{L_{II}} + \frac{1}{L_{III}} \quad (101.10) \qquad (103.10)$$

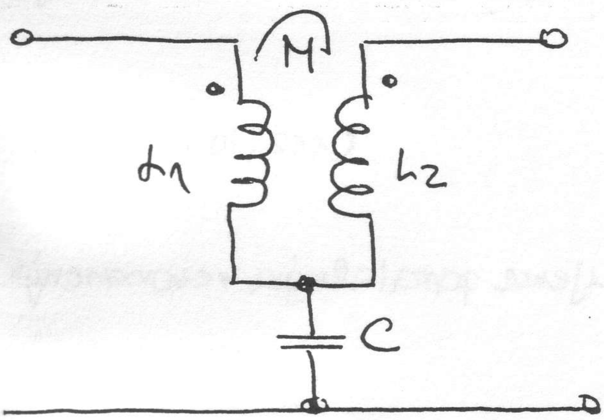
čoho

$$-\frac{1}{L_I} = \frac{1}{L_{II}} + \frac{1}{L_{III}} \Rightarrow \frac{1}{L_I} + \frac{1}{L_{II}} + \frac{1}{L_{III}} = 0 \qquad (104.10)$$

j:

$$L_I L_{II} + L_I L_{III} + L_{II} L_{III} = 0 \qquad (105.10)$$

...jpól naznačený na obr. 165, zložený s induktorov L_I, L_{II} a L_{III}, ...môžeme nahradiť trojpólom s magnetickou väzbou. Ekviva-ntný trojpól je na obr. 166., kde:



Obr. 166.

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= L_I + L_{II} \\ L_2 &= L_{II} + L_{III} \\ M &= L_{II} \\ C &= \frac{2h_0}{\omega_0^2} \end{aligned}\right\} (106.10)$$

Súčiniteľ väzby dokonalého transformátora možno určiť z indukčností L_1, L_2 a M. Dostaneme

$$k^2 = \frac{M^2}{L_1 L_2} = \frac{L_{II}^2}{(L_I + L_{II})(L_{II} + L_{III})} = \frac{L_{II}^2}{\underbrace{L_I L_{II} + L_{II}^2 + L_I L_{III} + L_{II} L_{III}}_{0}} = \frac{L_{II}^2}{L_{II}^2} = 1 \qquad (107.10)$$

...o vidieť. Brunevo realizačný postup vyžaduje použitie dokonalého ...ansformátora.

Keď bude $Y_3(p) = 0$, potom realizačný postup sa zastavuje na kroku ...nom rovnicou (98.10)

- Teraz predpokladajme, že v rovnici (95.10) je $X > 0$, $\omega_0 > 0$. Rovnicu (95.10) môžeme potom napísať v tvare admitancie:

$$Y_1(p) = \frac{1}{Z_1(p)} = \frac{1}{jX} = j\frac{1}{-X} = jY \qquad (108.10)$$

kde $Y=-1/X<0$

admitanciu $Y_1(p)$ rozštiepime na dve zložky

$$Y_1(p)=Y_2(p)+C_1p \qquad (109.10)$$

Predpokladajme, že v bode $p_0=j\omega_0$ bude mať $Y_2(j\omega_0)$ nulu, takže $Y_2(j\omega_0)=0$, a teda platí

$$Y_1(j\omega_0)=Y_2(j\omega_0)+j\omega_0C_1=j\omega_0C_1=jY \qquad (110.10)$$

takže:

$$C_1=Y/\omega_0 \qquad (111.10)$$

Pretože $Y<0$, je aj $C_1<0$. Pretože $Y_2(p)$ má v bode p_0 nulový bod, má tam $Z_2(p)$ pól. Potom

$$Z_2(p)=\frac{2h_0p}{p^2+\omega_0^2}+Z_3(p) \qquad (112.10)$$

Prvý člen pravej strany rovnice realizujeme paralelným rezonančným obvodom s členmi

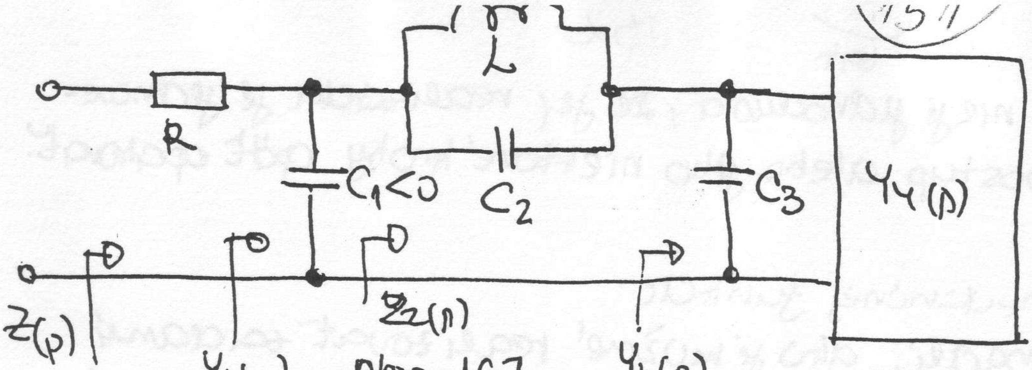
$$\frac{2h_0p}{p^2+\omega_0^2}=\frac{1}{p\frac{1}{2h_0}+\frac{1}{p\frac{2h_0}{\omega_0^2}}}=\frac{1}{pC_2+\frac{1}{pL}} \qquad (113.10)$$

$$C_2=\frac{1}{2h_0} \qquad L=\frac{2h_0}{\omega_0^2} \qquad (114.10)$$

Prvá časť pravej strany rovnice (112.10) má v nekonečnu nulový bod, musí tam mať potom nulový bod aj $Z_3(p)$. Preto je možné prevrátenú hodnotu tejto impedancie rozložiť na dvojčlen

$$Y_3(p)=pC_3+Y_4(p) \qquad (115.10)$$

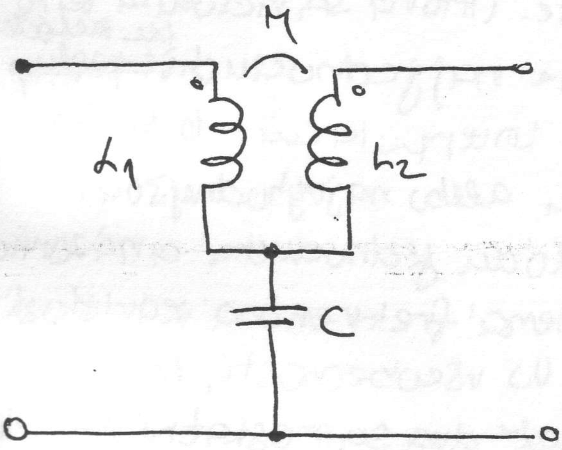
pričom $Y_4(p)$ je PRF nižšieho stupňa ako $Y(p)$. Realizačný postup je na obr. 167.



obr. 167

Obr. 167

Útvar so zápornou kapacitou C_1 možno opäť realizovať obvodom so vzájomnou magnetickou väzbou (obr. 168) kde



Obr. 168

$$L_1 = \frac{C_2 + C_3}{C_1 + C_3} L$$

$$L_2 = \frac{C_1 + C_2}{C_1 + C_3} L \qquad (116.10)$$

$$M = \frac{C_2}{C_1 + C_3} L$$

$$C = C_1 + C_3$$

neho metódu môžeme zhrnúť do nasledujúcich bodov:

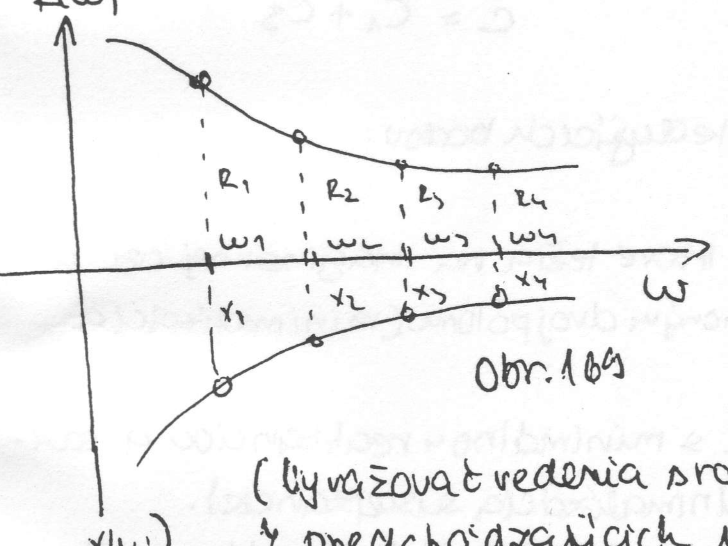
Určiť všetky póly impedančnej funkcie, ktoré ležia na imaginárnej osi a realizovať ich (1. Fosterovým) reaktančným dvojpólom (minimalizácia reaktancie).
Určiť všetky nuly impedančnej funkcie s minimálnou reaktanciou a realizovať ich reaktančným dvojpólom (minimalizácia susceptancie).
Podľa potreby treba oba body 1. a 2. opakovať tak dlho, kým zvyšková funkcia nemá žiadne body nulové ani póly na imaginárnej osi.
Zistíme veľkosť a polohu minima reálnej časti zvyškovej impedančnej funkcie
Určíme zvyškovú funkciu impedančnú s minimálnou rezistanciou.
Bruneho metódou realizujeme novo vytvorený nulový bod impedančná imaginárnej osi.
Trojpól realizujúci novovytvorený nulový bod na imaginárnej osi a obsahujúci jeden záporný prvok, nahradíme ekvivalentným zapojením.
...ju zvyšková funkcia nie je tak jednoduchá, že jej realizácia je jednoznačná,
[illegible]

8. Kým zvyšková funkcia nie je jednoduchá, že jej realizácia je jednoznačná, možno celý postup alebo jeho niektoré kroky opäť opakovať.

11.10. Aproximácia impedančnej funkcie

V predošlom sme naznačili, ako je možné realizovať vopred zadanú impedančnú funkciu. Otázkou je však teraz to, ako je možné túto impedančnú fciu zostaviť. Problematika aproximácie je tu podrobnejšie diskutovaná neskoršie. (ktorá sa riešením týchto úloh zaoberá). V tejto kapitole uvedieme najjednoduchšiu ~~postup~~ zo metód aproximácie impedančnej funkcie: zv. interpoláciu. O tejto metóde nemôžeme povedať, že je univerzálnou alebo najvýhodnejšou. Zvolili sme ju však preto, lebo sa jedná o metódu jednoduchú a názornú.

Predpokladajme, že na obr. 169 je zakreslená frekvenčná závislosť impedančnej funkcie $Z(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$. Vo všeobecnosti, by sme mali mať dva samostatné obrázky jeden pre reálnu a druhý pre imaginárnu časť impedancie. Pretože však reálna časť nebude nikdy záporná, a ďalej predpokladám že imaginárna časť bude mať trvale kapacitný charakter, je možné spojiť oba obrázky v jeden



Obr. 169

(vyjadrovať vedenia s rozťaženými parametrami).

Z predchádzajúcich úvah vieme, že impedančná fcia je zvláštnym prípadom racionálnej lomenej fcie. Zvláštnosť tu spočíva v tom, že musí byť PRF.

Všeobecný tvar impedančnej funkcie je daný rovnicou

$$Z(p) = \frac{a_r p^r + a_{r-1} p^{r-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_s p^s + b_{s-1} p^{s-1} + \dots + b_1 p + b_0} \qquad (117.10)$$

Dosadením za $p = j\omega$ do (117.10) dostaneme:

$$Z(j\omega) = \frac{a_0 + a_1(j\omega) + a_2(j\omega)^2 + \dots}{b_0 + b_1(j\omega) + b_2(j\omega)^2 + \dots} = R(\omega) + jX(\omega) \qquad (118.10)$$