KM NETA.

(1)

Poznámky k 1. prednáške.

a). obsah predmetu
b). význam predmetu, štátne záverečné skúšky.
c). Literatúra:

Čajka, J. – Kvasil, J. : Teorie lineárních obvodů. SNTL Praha, ALFA, 1979.
Kvasil, J. – Čajka, J. : Úvod do syntézy lineárních obvodů. SNTL, ALFA, 1981, Praha.
Hoffman, J. : Teória obvodov II. ALFA, Bratislava, 1985, Skriptum.

d), Hodnotenie poslucháča:

Celkový zisk bodov za semester: 100b
Z toho:
Cvičenia: 40b
~~prednášk~~ skúška 60b

Cvičenia: podmienky pre udelenie zápočtu:
1. Žiadna neospravedlnená neúčasť na cvičeniach.
2. Ospravedlnená neúčasť najviac na 3 cvičeniach.
3. Poslucháč musí za prácu na cvičeniach získať aspoň 20b.
4. Získanie bodov na cvičeniach:
 - 1. písomná práca: (analýza) 12b (povinné: nahradiť).
 - 2. písomná práca: (syntéza) 12b
 - SPICE (riešenie zadania na cvičení 30 min) 12b
 - príprava na cvičenie 4b
 - do PC – učebne prezuvky!

2

Skúška:

a). Písomná časť: (3x20min)
test základných znalostí (15 otázok), min. 11 správnych odpovedí, 30 min.
15 – 12b   12 – 3b
14 – 9b   11 – 0b
13 – 6b

b). Príklady 2x30 min.   (min 10b)
a) analýza   / max. 12b
b). syntéza   / max 12b

c). Ústna skúška:
2 otázky teoretického charakteru.
2 x 12 bod.   (min 10)

2-pr. Analýza
Syntézy 3x12
1-teo.
4 lístky

Celkové hodnotenie:

výborne 86 – 100b
veľmi dobre 70-85
dobre 53-69
nevyhovel 52 a menej

CV: max. 40 – min. 20.
Skúška: max. 60
– 0 neospravedl.
– 3 ospravedl.

e. Konzultačné hodiny:

f. Termíny prednášok:
Utorok: 9^{10}–10^{40}
Piatok: 7^{30} – 9^{00}

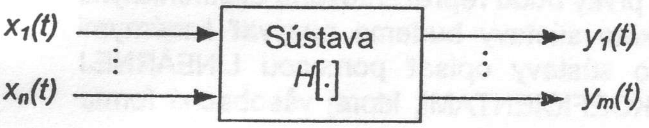
1.ZÁKLADNÉ POJMY

SIGNÁL: Signál je časovo premenná fyzikálna veličina, ktorá nesie správu. Matematicky je signál opísaný funkciou jednej alebo viacerých premenných.
1D SIGNÁL: Hovoríme, že signál je jednorozmerný (jednodimenzionálny, 1D), (n - rozmerný, ND), ak funkcia, ktorou je opísaný, je funkciou jednej (n) nezávislých premenných.
SPOJITÝ SIGNÁL (v čase): Hovoríme, že signál je spojitý v určitom časovom intervale, ak sú jeho hodnoty špecifikované v každom časovom okamihu tohoto intervalu.
DISKRÉTNY SIGNÁL (v čase): Hovoríme, že signál je diskrétny v čase, ak jeho hodnoty sú špecifikované len v určitých (diskrétnych) časových okamihoch.
SÚSTAVA / SYSTÉM: Je súbor vzájomne prepojených prvkov, ktoré generujú jeden alebo viac signálov, ktoré sa nazývajú výstupnými signálmi sústavy, Signály vstupujúce do sústavy sa nazývajú vstupnými signálmi sústavy. Výstupné signály sústavy, t.j. signály, ktoré zo sústavy vystupujú, sa nazývajú tiež odpoveďou (odozvou) sústavy.
SPOJITÁ SÚSTAVA: Hovoríme, že sústava je spojitá (analógová), ak jej vstupné a výstupné signály sú tiež spojité signály.

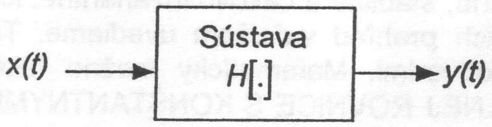
V ďalšom budeme pre závislosť medzi vstupným a výstupným signálom sústavy používať označenie

$$y(t) = H[x(t)] \qquad (1)$$

kde $H[.]$ je operátor (zobrazenie), ktoré charakterizuje vlastnosti sústavy, $x(t)$ je vstupný a $y(t)$ je výstupný signál. V grafickej forme možno vzťah (1) znázorniť tak, ako je uvedené na obr.1 a obr.2.



obr.1



obr.2

2.ZÁKLADNÉ VLASTNOSTI SÚSTAV

Medzi základné vlastnosti, pomocou ktorých sú sústavy charakterizované, (obyčajne) patria:

- kauzalita (fyzikálna realizovateľnosť)
- zotrvačnosť
- stabilita
- stacionarita (časová invariantnosť)
- linearita

KAUZALITA (FYZIKÁLNA REALIZOVATEĽNOSŤ): Sústava je kauzálna vtedy, ak jej odpoveď v čase $t = t_0$ nezávisí na vstupnom signále sústavy v čase $t > t_0$ .Sústava, ktorá nie je kauzálna, je nekauzálna (fyzikálne nerealizovateľná).
Sústava je **NEZOTRVAČNÁ (BEZPAMÄŤOVÁ)**, ak jej odpoveď v hociktorom časovom okamihu závisí len od hodnoty vstupného signálu sústavy v tom istom časovom okamihu. Sústavy, ktoré nie sú nezotrvačné (bezpamäťové), sa nazývajú zotrvačnými (pamäťovými) sústavami.
STABILITA (BIBO, Bounded Input Bounded Output): Sústava je stabilná vtedy a len vtedy, ak odpoveď sústavy na obmedzený vstupný signál je tiež obmedzená. (Okrem tejto charakteristiky existuje iné ponímanie termínu stability.)
Sústava je **ČASOVO INVARIANTNÁ (STACIONÁRNA)**, ak jej parametre nie sú funkciami času. T.j. ak vstupnému signálu sústavy, ktorý bude posunutý v čase, bude zodpovedať odpoveď sústavy tak, že platí.

$$y(t) = H[x(t)] \Rightarrow y(t+\tau) = H[x(t+\tau)] \quad (2)$$

Hovoríme, že sústava je homogénna pre ľubovoľný vstupný signál *x(t)* a ľubovoľnú konštantu *a*, ak platí:

$$H[a.x(t)] = a.H[x(t)] \quad (3)$$

Hovoríme, že sústava je aditívna, ak odpoveď sústavy na vstupný signál

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad (4)$$

je rovná sume odpovedí sústavy na signály $x_1(t)$ a $x_2(t)$, t.j.

$$H[x_1(t) + x_2(t)] = H[x_1(t)] + H[x_2(t)] \quad (5)$$

LINEARITA SÚSTAV:

a) Hovoríme, že sústava je lineárna, ak je homogénna a aditívna.

b) Hovoríme, že sústava je lineárna, ak vyhovuje princípu superpozície, t.j. ak pre ľubovoľné konštanty a_1 a a_2 a ľubovoľné vstupné signály $x_1(t)$ a $x_2(t)$ platí:

$$H[a_1.x_1(t) + a_2.x_2(t)] = a_1.H[x_1(t)] + a_2.H[x_2(t)] \quad (6)$$

Sústava, ktorá nie je lineárna, je nelineárna.

Poznámka: V rámci nášho kurzu sa budeme zaoberať len sústavami, ktoré sú lineárne, spojité, kauzálne, stabilné a časovo invariantné. Ich prvky budú reprezentované elektronickými prvkami, ktorých prehľad v ďalšom uvedieme. Takéto sústavy budeme nazývať lineárnymi analógovými obvodmi. Matematicky možno takéto sústavy opísať pomocou LINEÁRNEJ DIFERENCIÁLNEJ ROVNICE S KONŠTANTNÝMI KOEFICIENTAMI, ktorej všeobecná forma je daná vzťahom

$$b_r \frac{d^r y(t)}{dt^r} + b_{r-1} \frac{d^{r-1} y(t)}{dt^{r-1}} + \cdots + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0.y(t) = a_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0.x(t) \quad (7)$$

kde *y(t)* je odpoveď lineárnej sústavy

x(t) je vstupný signál sústavy

a_i, a_j sú konštantné koeficienty (*i= 0,1,...,r. j=0,1,...,m*)

1.ZÁKLADNÉ POJMY A PRVKY ELEKTRONICKÝCH OBVODOV

1.1 ZÁKLADNÉ POJMY

V rámci predmetu LAO sa budeme zaoberať analýzou a syntézou lineárnych a linearizovaných obvodov. Úlohou analýzy je vyšetrovanie vlastností sústavy, ak poznáme štruktúru a parametre analyzovanej sústavy. Pri syntéze hľadáme štruktúru a hodnoty parametrov sústavy tak, aby sústava mala požadované vlastnosti. Úloha analýzy má obyčajne jediné riešenie. Na rozdiel od toho je úloha syntézy vo všeobecnosti zložitejšia, pričom obyčajne má niekoľko rôznych riešení. Niektoré z týchto riešení môže byť podľa určitého kritéria optimálne. Sústavy, ktorých analýzou a syntézou sa zaoberáme v rámci teórie obvodov, sú **elektrické obvody**. **Elektrickým obvodom** nazývame priestorovo ohraničenú sústavu navzájom prepojených prvkov, v ktorej možno elektromagnetické deje (procesy) popísať dostatočne presne pomocou prúdov a napätí. Sústava zložená zo skutočných, reálnych prvkov predstavuje obyčajne určité zariadenie (alebo jeho časť). Takúto sústavu zobrazujeme

pomocou schematických značiek reálnych prvkov v tvare prehľadného obrazca, ktorý nazývame **schémou zapojenia.**
Každý reálny prvok (súčiastku) môžeme v danej pracovnej oblasti nahradiť **modelom**, zloženým z jedného alebo z niekoľkých ideálnych obvodových prvkov rôzneho charakteru. Takýto model sa tiež nazýva **ekvivalentným** alebo **náhradným obvodom.**
Vlastnosti prvkov elektrických obvodov sú opísané ich **charakteristikami.** Pod pojmom **charakteristika** elektrického obvodu chápeme závislosť jednej veličiny od inej veličiny, ktorá je pre prvok alebo objekt charakteristická. Charakteristiky reálnych prvkov sú obyčajne závislé od charakteru pôsobiaceho signálu. Fyzikálne modely reálnych súčiastok sa obyčajne skladajú, pozostávajú z niekoľkých elementárnych obvodových prvkov, ktoré sa vyznačujú tým, že ich dynamické vlastnosti možno popísať jednoduchými vzťahmi. Tieto elementárne obvodové prvky sa nazývajú **ideálne obvodové prvky.** Javy vo fyzikálnych modeloch opisujeme **matematickým modelom**, tj.sústavou rovníc, v ktorej elektrické veličiny (prúdy, napätia, náboj,..) *sú premenné, kým časovo nepremenné parametre linearizovaných prvkov sú* konštanty.
Súčiastky zobrazujeme v schéme zapojenia **dohodnutými, normovanými schematickými značkami.** Na zobrazenie ideálnych obvodových prvkov v modelových schémach používame tiež dohodnuté schematické značky. Pre niektoré ideálne obvodové prvky používame rovnaké schematické značky ako pre zodpovedajúce súčiastky. Niektoré schematické značky boli vytvorené len pre teóriu obvodov.

1.2 OBVODOVÉ PRVKY

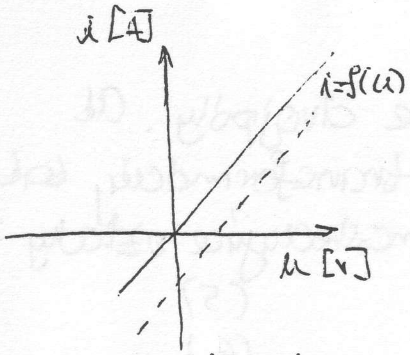
Obvodové prvky možno rozdeliť podľa rôznych hľadísk, a to najmä:
a) podľa počtu vývodov - dvojpóly, trojpóly, štvorpóly,... ,n-póly
b) podľa energetickej bilancie - aktívne, pasívne
c) podľa tvaru charakteristiky - lineárne, nelineárne
V ďalšom sa budeme zaoberať len ideálnymi obvodovými prvkami.

1.2.1 DVOJPÓLY

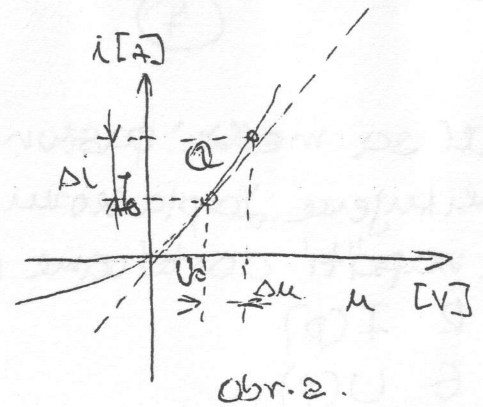
Najjednoduchšími obvodovými prvkami sú dvojpóly, ktoré je možné spojiť s inými prvkami len dvoma vývodmi (svorkami, pólmi). Dvojpóly sa ďalej spravidla rozdeľujú:
a) podľa zložitosti - elementárne, zložené
b) podľa časovej závislosti parametrov - s konštantnými parametrami, s časovo premennými parametrami
c) podľa možnosti riadenia ich vlastností - riadené, neriadené

1.2.1.1 NERIADENÉ DVOJPÓLY

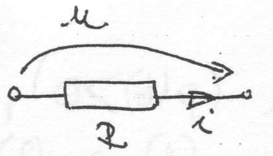
Medzi elementárne neriadené dvojpóly patria:
- rezistory (odpor)
- induktory (cievka)
- kapacitory (kondenzátor)
- zdroje (prúdu, napätia)



Obr. 1



Obr. 2



$i=f(u)$; $u=\varphi(i)$

Obr. 3

Ideálny rezistor je charakterizovaný buď závislosťou prúdu na napätí t.j. $i=f(u)$ (ampérvoltová charakteristika) alebo inverznou závislosťou $u=\varphi(i)$ (voltampérová charakteristika). Ak má ideálny rezistor priamkovú charakteristiku, nazývame ho **lineárny rezistor**. Rezistor s nelineárnou charakteristikou sa nazýva **nelineárny rezistor**.

Lineárnu ampérvoltovú (voltampérovú) charakteristiku možno vyjadriť rovnicou priamky, ~~ktorá~~ prechádza počiatkom súradníc takto:

$$u = R\,i \qquad ; \; R \quad [\Omega] \qquad (1)$$

resp.

$$i = G\,u \qquad G \quad [S] \qquad (2)$$

kde parameter R je, ktorý nazývame **odpor (činný odpor)** a G je parameter, ktorý sa nazýva vodivosť. Podľa vzťahov (1) a (2) je prúd (napätie) priamo úmerný napätiu (prúdu), čo je vyjadrením Ohmovho zákona.

Základnou vlastnosťou rezistora je to, že sa v ňom mení elektromagnetická energia A na teplo:

$$A(t)=\int_{t_1}^{t_2} u(t)\,i(t)\,dt=\int_{t_1}^{t_2} R(t)\,i^2(t)\,dt \qquad (3)$$

Pretože $i^2(t)>0$ je energia, ktorá sa za určitú dobu rozptýli v rezistore, je kladná (pre $R>0$)!

Okamžitý výkon pri spotrebičovej orientácii šípok označujúcich smery prúdov a napätí je daný vzťahom

$$p(t)=u(t)\,i(t)=R\,i^2(t) \qquad (4)$$

Vzťah (4) sa nazýva tiež energetickou funkciou, zapamätajúcou rezistor R. [illegible] len straca ($p(t) > 0$), radí sa medzi pasívne dvojpóly. Ak na vzťahy (1) a (2) aplikujeme Laplaceovu transformáciu, tak medzi obrazmi prúdov a napätí dostávame nasledujúce vzťahy:

$$U(p) = R\ I(p) \qquad (5)$$

$$I(p) = G\ U(p) \qquad (6)$$

kde $U(p) \triangleq \mathcal{L}\{u(t)\}$

$I(p) = \mathcal{L}\{i(t)\}$

Operátor p je vo všeobecnosti komplexné číslo (nazýva sa tiež komplexný kmitočet)

$$p = \sigma + j\omega \qquad (7)$$

s ustáleným stave, pri harmonickom budení je

$$\sigma = 0 \qquad (8)$$

takže rovnice (5) resp. (6) prejdú na vzťahy medzi komplexnými amplitúdami

$$U(j\omega) = R\ I(j\omega) \qquad (9)$$

$$I(j\omega) = G\ U(j\omega) \qquad (10)$$

Pretože $u(t) = U\cos(\omega t + \varphi) = Re\{U e^{j\omega t} e^{j\varphi}\}$, nazveme číslo $\dot{U} = U e^{j\varphi}$ **komplexnou amplitúdou (fázorom).**

Nelineárna A-V charakteristika ideálneho rezistora (obr.2) je napr. uvedená na obr.2. Z obr. je vidieť, že odpor nelineárneho rezistora pre jednosmerné napätie je závislý na privedenom napätí, pričom ide o tzv. **statický / jednosmerný odpor** definovaný vzťahom

$$R(U_0) = U_0 / I_0 \qquad (11)$$

Funkciu $i = f(u)$ môžeme rozvinúť v okolí kľudového bodu (napr. $[U_0, I_0]$) do Taylorovho radu takto:

$$i = f(U_0) + \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f(u)}{\partial u}\right]_{u=U_0} \Delta u + \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(u)}{\partial u^2}\right]_{u=U_0} \Delta u^2 + \dots \qquad (12)$$

kde Δu je odchýlka napätia, definovaná vzťahom

$$\Delta u = u - U_0 \qquad (13)$$

pre malé hodnoty Δu, resp. pre malé hodnoty $f^{(k)}(U_0)$,

...smo vzťah (12) aproximovali s dostatočnou presnosťou použitím ...ho prvých dvoch členov takto:

$$i = f(U_0) + f'(U_0)\Delta u \qquad (14)$$

...žitím tejto aproximácie nahradíme A-V charakteristiku v okolí ...dového bodu /pracovného bodu priamkou. Ak teraz posunieme ...radné osi do bodu Q, môžeme pre malé napätia linearizovať, ... nahradiť ho lineárnym rezistorom s vodivosťou

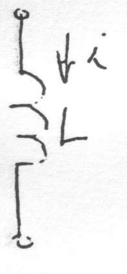
$$G_d = \left[df(u)/du\right]_{u=U_0} = \left[\frac{di}{du}\right]_{u=U_0} \qquad (15)$$

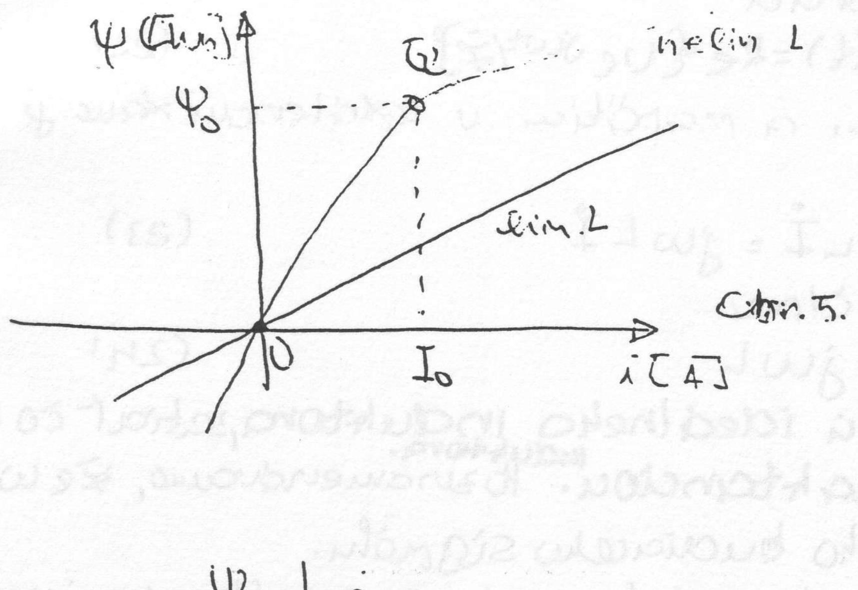
...ičinu G_d nazývame **diferenciálnou (dynamickou) vodivosťou**. Jej prevrátená hodnota

$$R_d = 1/G_d \qquad (16)$$

...nazýva **diferenciálnym (dynamickým) odporom**. Poznamenajme, že malým napätím rozumieme také napätie Δu, v ktorého ...ameckom rozsahu sa charakteristika A-V líši od dotyčnice v ľubovoľnom pracovnom bode Q len veľmi málo.

Ideálny induktor je charakterizovaný závislosťou medzi prúdom a spriahnutým (ekvivalentným) magnetickým tokom $\psi(t)$, ...ukt ampérweberovou (A-Wb) charakteristikou $i = f(\psi)$, alebo ...erampérovou charakteristikou $\psi = f(i)$. Schematická značka ...álneho (i reálneho) induktora, ako aj Wb-A charakteristiky ...árneho a nelineárneho induktora sú uvedené na obr.4-5





Charakteristiku ideálneho lineárneho induktora možno analyticky opísať rovnicou priamky idúcou cez počiatok súradníc, súradnicovej sústavy takto:

$$\psi = L\, i \qquad (17)$$

kde parameter L je veličina, ktorá sa nazýva indukčnosť. Neli-nearny induktor je možné pre malé zmeny prúdu v okolí kľudo- vého pracovného bodu linearizovať, zavedením diferenciálnej (dynamickej) indukčnosti

$$L_d = \frac{d\Psi}{di}\bigg|_{i=I_0} \qquad (17)$$

medzi časovo premenným napätím $u(t)$ na induktore a prúdom $i(t)$ tečúcim induktorom platia nasledujúce vzťahy:

$$u(t) = \frac{d\Psi}{dt} = L\frac{di}{dt} \qquad (18)$$

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_0^t u(t)\,dt + i(0) \qquad (19)$$

kde $i(0)$ je okamžitá hodnota prúdu v časovom okamihu $t=0$ (tzv. počiatočná hodnota prúdu). Vzťahy (18) a (19) môžeme vyjadriť v operátorovej forme takto:

$$U(p) = pL\,I(p) - L\,i(0) \qquad (20)$$

$$I(p) = \frac{1}{pL}U(p) + \frac{i(0)}{p} \qquad (21)$$

Pri harmonickom budení (napr. $u(t) = U\cos(\omega t + \varphi)$) prechádza reálnym induktorom prúd

$$i(t) = \mathrm{Re}\{U e^{j\omega t}/Z\} \qquad (22)$$

Vzťah medzi prúdom a napätím v ustálenom stave je potom daný vzťahom

$$\dot{U} = \hat{Z}\dot{I} = jX_L\dot{I} = j\omega L\dot{I} \qquad (23)$$

kde komplexnú veličinu

$$\hat{Z} = jX_L = j\omega L \qquad (24)$$

nazývame **impedanciou ideálneho induktora**, zatiaľ čo veličinu X_L nazývame **reaktanciou** induktora. Pripomeňme, že ω je frekvencia harmonického budiaceho signálu.

Pre energiu A, ktorú dodá zdroj do ideálneho induktora za čas od t_1 do t_2 platí:

$$A = \int_{t_1} u(t)\, i(t)\, dt = \int_{t_1} L \frac{di(t)}{dt}\, i(t)\, dt = L \int_{t_1} i(t) \frac{di(t)}{dt}\, dt$$

10

ntegrácia per-partes:

$$\int i'(t)\, i(t)\, dt = i(t)\, i(t) - \int i(t)\, i'(t)\, dt \Rightarrow i^2(t) = 2 \int i'(t)\, i(t)\, dt$$

otom pre A platí:

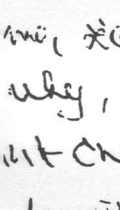
$$A = \frac{L}{2} \left[i^2(t) \right]_{t_1}^{t_2} = \frac{L}{2} \left[i^2(t_2) - i^2(t_1) \right] \qquad (25)$$

o vzťahu (25) vidíme, že energia vstupujúca do prvku, môže byť kladná, alebo záporná. Ak je $i_1 = 0$, tak je energia do zotrvačnosti vždy kladná, t.j.

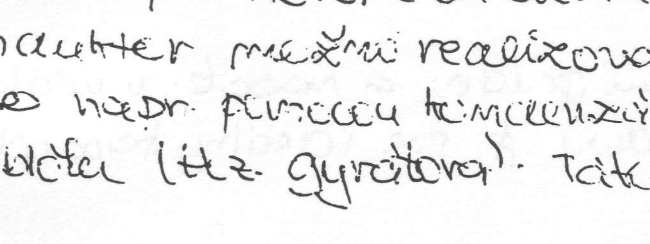
$$A(t) = T(t) = \frac{1}{2} L i^2(t) \qquad (26)$$

unkciu T(t) nazývame **energetickou funkciou**. Pretože $T(t) > 0$ ($L > 0$), radíme ideálne induktory medzi pasívne dvojpóly. Ideálny induktor akumuluje elektromagnetickú energiu v podobe poľa. V prípade ideálneho induktora (cievky) je to magnetické pole, ktoré existuje v prostredí, v ktorom sa cievka nachádza. Tu poznamenáme, že induktor možno realizovať tiež inak, než použitím cievky, a to napr. pomocou kondenzátora a vhodného transformačného prvku (tzv. gyrátora). Táto otázka bude diskutovaná neskôr.

deálny kapacitor je charakterizovaný závislosťou medzi napätím a elektrickým nábojom, t.j. buď volt-coulombovou charakteristikou $u = f(q)$ alebo coulombvoltovou charakteristikou $q = f(u)$. Schématická značka ideálneho a reálneho kapacitora je uvedená na obr. 6. C-ki charakteristiky lineárneho a nelineárneho kapacitora sú uvedené na obr. 7. Charakteristiku lineárneho kapacitora možno opäť popísať rovnicou priamky prechádzajúcej počiatkom súradnej sústavy:



r. 6.



obr. 7.

$$\Psi = C\,u \qquad (27)$$

kde parameter C označuje kapacitu tohoto prvku. Ak sú splnené podmienky linearizácie, možno nahradiť nelineárny kapacitor lineárnym, ktorého kapacita je diferenciálna/dynamická je daná vzťahom

$$C_d = \frac{dq}{du}\bigg|_{q=q_0} \qquad (28)$$

Vzťah medzi časovo premenným prúdom i(t) a napätím u(t) je daný v prípade ideálneho kapacitora týmito rovnicami:

$$i(t) = C\,\frac{du(t)}{dt} \qquad (29)$$

resp.

$$u(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt + u(0) \qquad (30)$$

kde u(0) je okamžitá hodnota napätia v časovom okamihu t=0. Operátorový vzťah (tvar) (29) a (30) je potom

$$I(p) = pC\,U(p) - C\,u(0) \qquad (31)$$

resp.

$$U(p) = \frac{I(p)}{pC} + \frac{u(0)}{p} \qquad (32)$$

Vzťah medzi amplitúdami prúdu a napätia v ustálenom stave pri harmonickom budení je pre ideálny kapacitor daný týmito vzťahmi:

$$\dot{I} = \dot{Y}\dot{U} = \frac{1}{-jX_C}\dot{U} = jX_C U = j\omega C\dot{U} \qquad (33)$$

$$\dot{U} = \dot{Z}\dot{I} = \frac{1}{jX_C}\dot{I} = \frac{1}{j\omega C}\dot{I} \qquad (34)$$

kde $\dot{Z}$ ($\dot{Y}$) daná vzťahom

$$\dot{Z} = 1/j\omega C \qquad (35)$$

$$\dot{Y} = j\omega C \qquad (36)$$

nazýva impedanciou/admitanciou ideálneho kapacitora

Energia, ktorá vstúpi do ideálneho kapacitora v časovom intervale t_1 do t_2 je

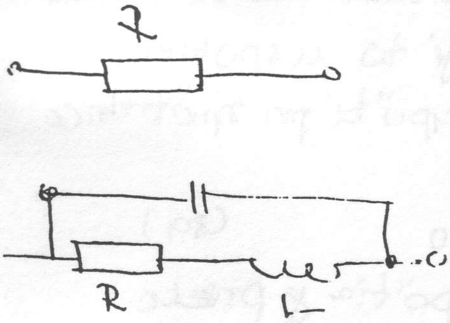
$$A = \int_{t_1}^{t_2} u(t)\, i(t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} C \frac{du(t)}{dt} u(t)\, dt = \frac{C}{2}\left(u_2^2 - u_1^2\right) \qquad (37)$$

Vzťah (37) ukazuje, že energia vstupujúca do prvku, môže byť kladná alebo záporná. Ak $u_1 = 0$, tak pre okamžitú hodnotu energie $A(t)$ platí:

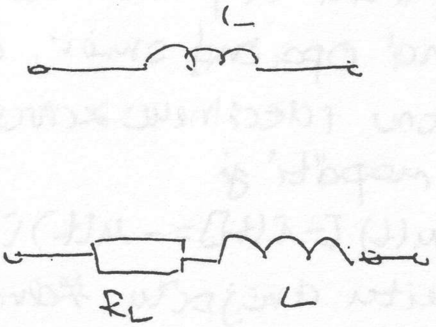
$$A(t) = V(t) = \frac{1}{2} C u^2(t) \geq 0 \qquad (38)$$

Potom funkcia $V(t)$ je tiež energetickou funkciou. Vzhľadom na nerovnosť, použitú vo vzťahu (38) zaradíme ideálne kapacitory medzi pasívne dvojpóly. Ideálny kapacitor akumuluje elektrickú energiu v podobe elektrického poľa.

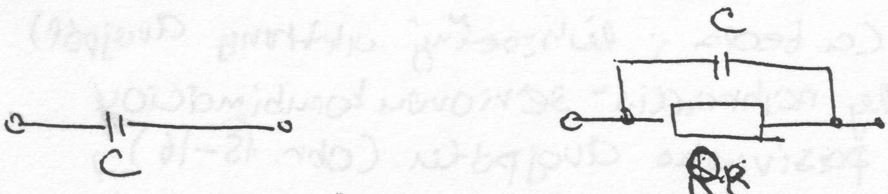
V predošlých častiach sme sa zaoberali problematikou ideálneho rezistora, induktora a kapacitora. Skutočný/reálny rezistor, induktor či kapacitor sa v prvom priblížení nahradzujú ideálnym rezistorom, induktorom a kapacitorom. Niektoré presnejšie modely týchto prvkov, rešpektujúce ich tzv. parazitné vlastnosti (napr. kapacity, u akumulačných prvkov) sú naznačené na obr. 8-10. Obsahujú už aspoň kombináciu dvoch základných ideálnych prvkov.



obr. 8.
model reálneho rezistora

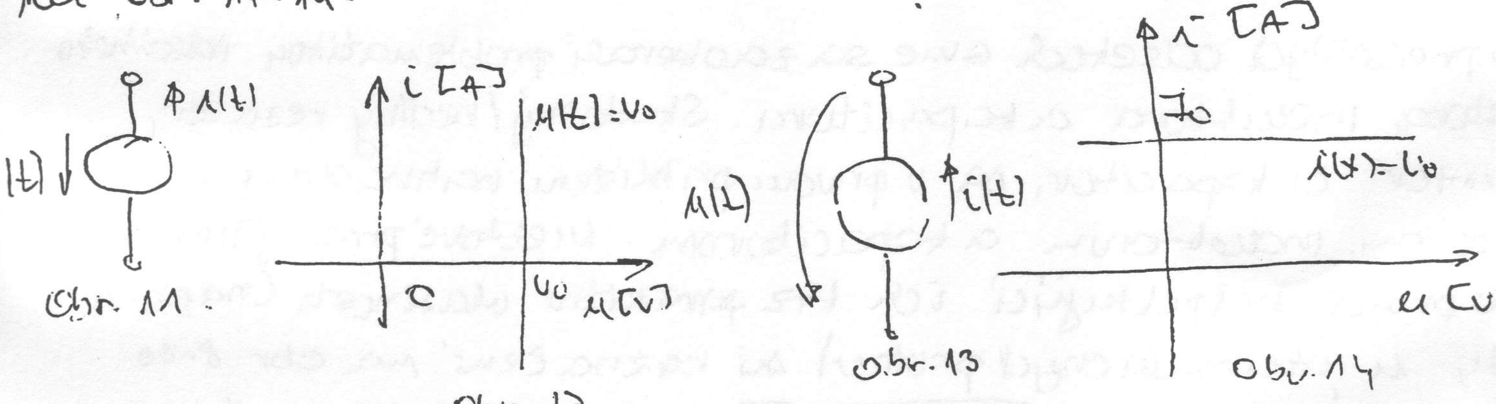


obr. 9
model reálnej cievky



obr. 10. model reálneho kondenzátora.

Zdroje elektromagnetickej energie sú dvojpóly, ktoré sú schopné dodávať trvale ener[giu] do záťaže (sústavy obvodov) a patria preto medzi aktívne dvojpóly. **Ideálny zdroj napätia** môže mať najrôznejší priebeh napätia, ktoré však nezávisí na prúde dodávaným zdrojom do vonkajších obvodov, alebo na prúde, ktorý ním preteká. Ideálny zdroj napätia má teda nulový vnútorný odpor alebo nekonečne veľkú vnútornú vodivosť. **Ideálny zdroj prúdu** je dvojpól, ktorého prúd nezávisí na napätí, ktoré sa objaví na jeho svorkách, t.j. tento zdroj má nekonečne veľký vnútorný odpor resp. nulovú vnútornú vodivosť. Schematické značky oboch ideálnych zdrojov a ich A-V charakteristiky sú znázornené na Obr. 11-14.



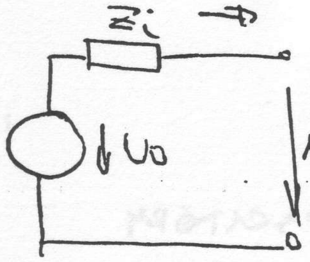
Obr. 11. Obr. 12 Obr. 13 Obr. 14

Nakoľko prúd i(t) je vonkajšej sústave vyvolaný zdrojom napätia pri označení smerov napätia a prúdu tu používame tzv. zdrojovú orientáciu. Prúd i tu má opačný smer, ako je to u spotrebičovej orientácii. Okamžitý výkon ideálneho zdroja napätia pri spotrebičovej orientácii prúdu a napätia je

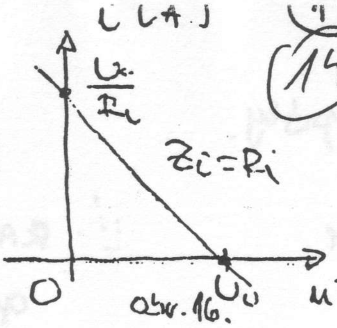
$$p(t) = u(t)[-i(t)] = -u(t)i(t) < 0 \qquad (39)$$

a charakterizuje aktivitu dvojpólu. Zdroj napätia je preto **aktívny dvojpól.** Podobné závery môžeme urobiť pre ideálny zdroj prúdu.

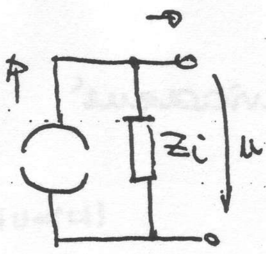
REÁLNY ~~Skutočný~~ zdroj napätia (a teda i ľubovoľný aktívny dvojpól) môžeme podľa Theveninovej vety nahradiť sériovou kombináciou ideálneho zdroja napätia a pasívneho dvojpólu (obr. 15-16), pričom REÁLNY ~~skutočný~~ zdroj prúdu (podľa Nortonovej vety) paralelnou kombináciou ideálneho zdroja prúdu a pasívneho dvojpólu (obr. 17-18)



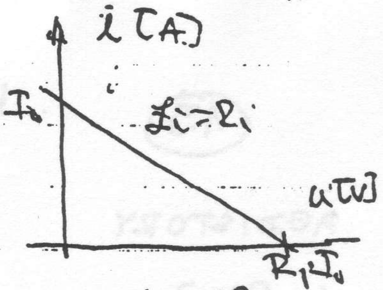
obr. 15



obr. 16.



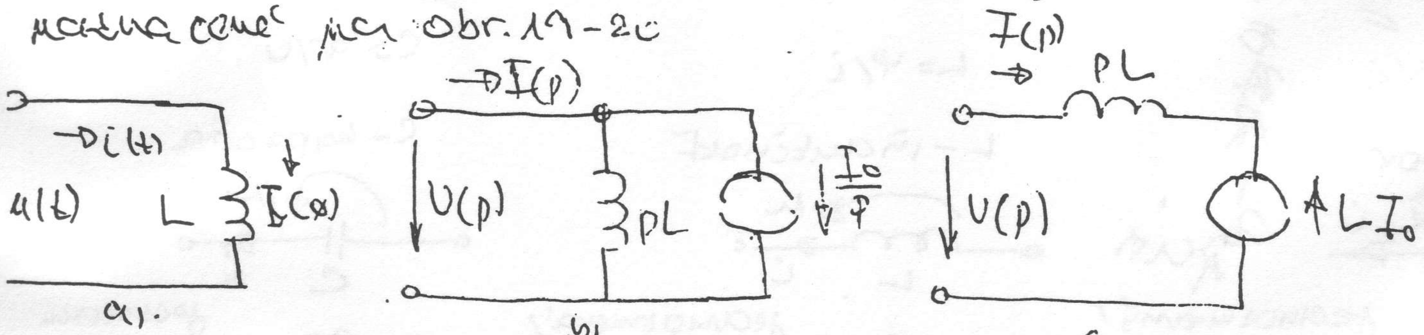
obr. 17



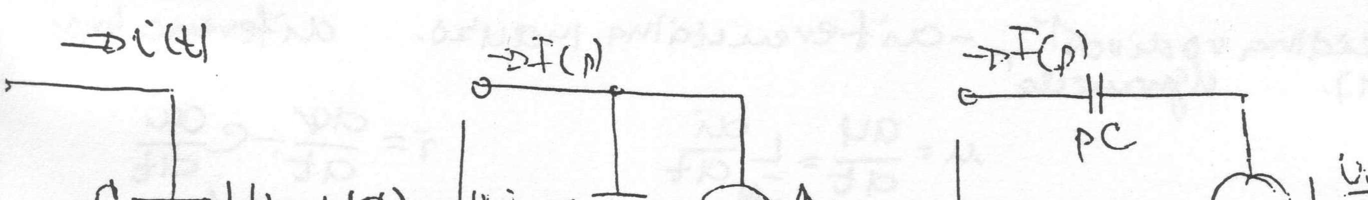
obr. 18

Symbol $\dot{Z}_i$ predstavuje v oboch prípadoch tkz. vnútornú impedanciu zdroja (vo všeobecnosti je výstupná impedancia aktívneho dvojpólu). Oba ~~unitorné~~ reálne zdroje sú navzájom ekvivalentné, ak ich vnútorná impedancia je rovnaká a ak platí $\dot{U}_0 = \dot{Z}\dot{I}_0$. Zodpovedajúce A-V charakteristiky sú naznačené na obr. 16 a 18.

Pomocou ideálnych zdrojov možno modelovať vlastnosti ideálnych akumulačných prvkov s nenulovými počiatočnými hodnotami prúdu a napätí. Toto použitie ideálnych zdrojov prúdu a napätí naznačené na obr. 19-20



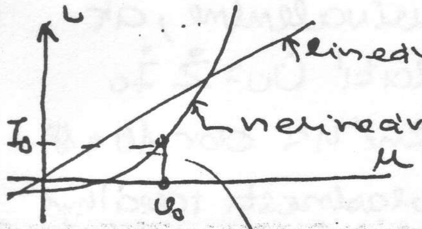
obr. 19. Ideálny induktor s nenulovým počiatočným prúdom. a) Schematická značka, b) a c) ekvivalentné obvody v Laplaceovej transformácii.

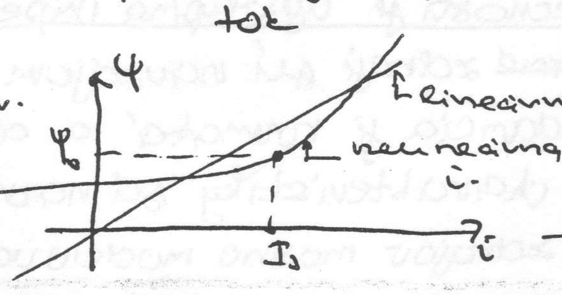


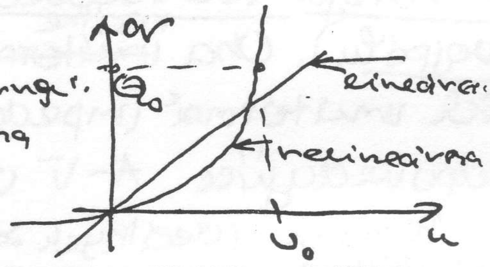
20. Ideálny kapacitor s nenulovým počiatočným napätím. a) schematická značka, b) a c) ekvivalentné obvody v Laplaceovej transformácii.

15 Neriadené dvojpóly.

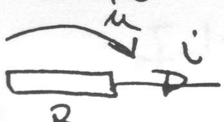
REZISTORY	INDUKTORY	KAPACITORY
$i = f(u)$	$i = f(\psi)$	$q = f(u)$
$u = f^{-1}(i)$	$\psi = f^{-1}(i)$	$u = f^{-1}(q)$
u – odpor, i – napätie	ψ – spriahnutý magnetický tok	q – náboj

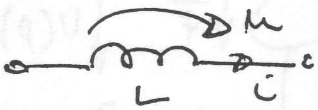


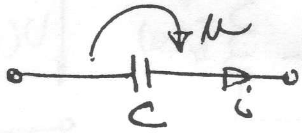




$i = G u$	$\psi = L i$	$q = C U$
$u = R i$	$i = L/\psi$	$U = q/C$
$R = u/i$	$L = \psi/i$	$C = q/U$
R – odpor	L – indukčnosť	C – kapacita







$R_0 = \frac{U_0}{I_0}$ jednosmerný / statický R

$L_0 = \frac{\psi_0}{I_0}$ jednosmerná statická indukčnosť

$C_0 = \frac{Q_0}{U_0}$ jednosm. statická kapacita

$R_d = \frac{\Delta u}{\Delta i} = \frac{du}{di}\Big|_{i=I_0}$ diferenciálna vodivosť (R) dynamická

$L_d = \frac{\Delta\psi}{\Delta i} = \frac{d\psi}{di}\Big|_{I=I_0}$ – diferenciálna indukč.

$C_d = \frac{\Delta q}{\Delta u} = \frac{dq}{du}\Big|_{U}$ diferenc. kapac.

$u = R i$

$i = G u$

$u = \frac{d\psi}{dt} = L\frac{di}{dt}$

$i = \frac{1}{L}\int_0^t u(t)\,dt + i(0)$

$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du}{dt}$

$u(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt + u(0)$

$p = \sigma + j\omega$, komplexná frekvencia

$U(p) = R\,I(p)$

$U(p) = pL\,I(p) - L\,i(0)$

$I(p) = \frac{1}{pL}U(p) + \frac{1}{p}i(0)$

$I(p) = pC\,U(p) - C\,u(0)$

$U(p) = \frac{1}{pC}I(p) + \frac{1}{p}u(0)$

ustálený stav – harmonické budenie: X_C, X_L – reaktancia.

$U(j\omega) = R\,I(j\omega)$

$U(j\omega) = j\omega L\,I(j\omega)$

$U(j\omega) = \frac{1}{j\omega C}I(j\omega)$

R – impedancia

G – admitancia

$Z(j\omega) = j\omega L = jX_L$

$Z(j\omega) = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{jX_C}$

$-(t) = \int_{t_1}^{t_2} u(t)\, i(t) =$

$= \int_{t_1}^{t_2} R i^2(t)\, dt$

$(t) = R i^2(t) > 0$;

pasívny prvok

-- kladný

< 0 - záporný

- aktívny!

16

$A(t) = \int_{t_1}^{t_2} u(t)\, i(t)\, dt$

$= \int_{t_1}^{t_2} L \frac{di}{dt} i(t)\, dt$

$= \frac{1}{2} L \left(i^2(t_2) - i^2(t_1) \right)$

$i(t_1) = 0$

$T(t) = \frac{1}{2} L i^2(t) > 0$

- ~~pasívne~~ bezstratové

- zmena formy energie

$A(t) = \int_{t_1}^{t_2} u(t)\, i(t)\, dt$

$= \int_{t_1}^{t_2} u(t)\, C \frac{du}{dt}\, dt =$

$= \frac{1}{2} C \left(u^2(t_2) - u^2(t_1) \right)$

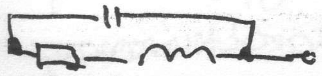
$u(t_1) = 0$

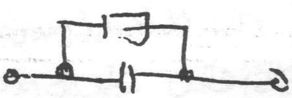
$V(t) = \frac{1}{2} C u^2(t) > 0$

- ~~pasív.~~ bezstratové

- zmena formy energie

(t), $T(t)$, $V(t)$ - energetické funkcie



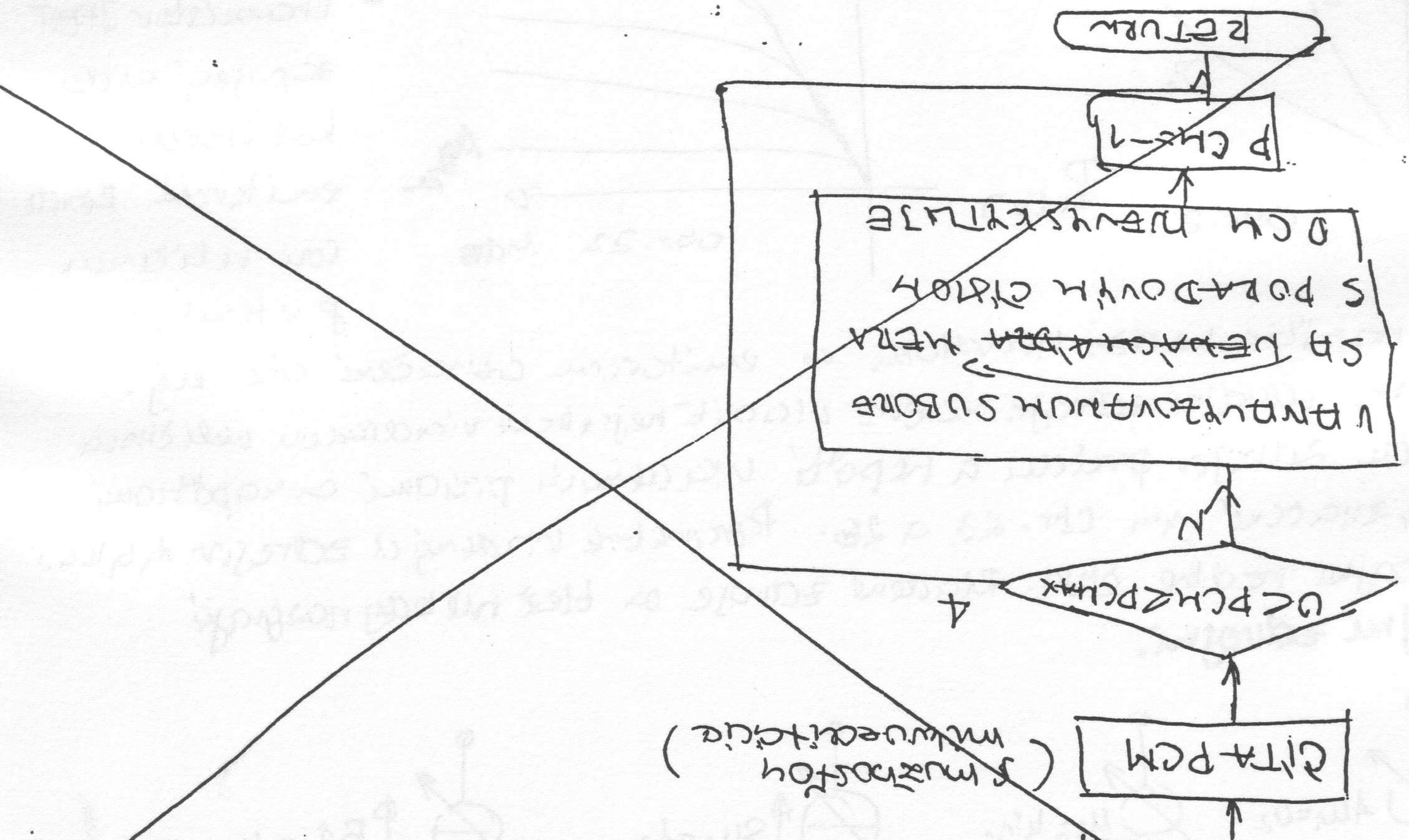


iné prvky

- syntetické prvky.

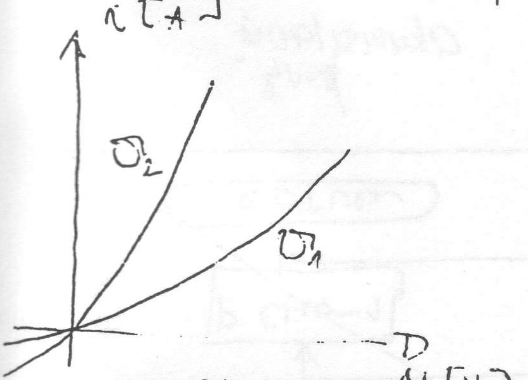
akumulačné prvky

akumulačné prvky

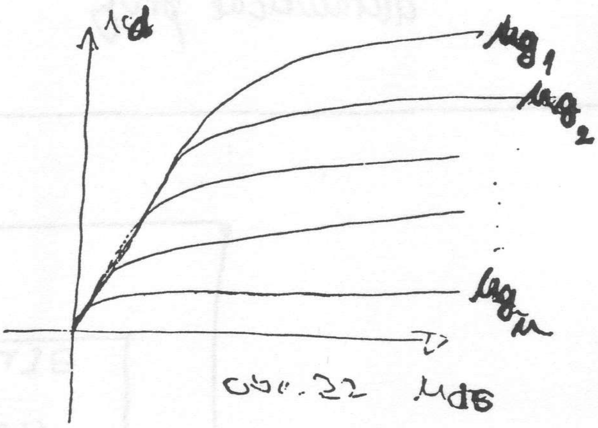


1.2.1.2. Riadené dvojpóly.

Parametre zaťažených dvojpólov možno riadiť (meniť, ovládať), zmenou tzv. riadiacej veličiny, ktorou môže byť ľubovoľná veličina, napr. teplota, tlak, osvetlenie, atď., ale i napätie alebo prúd. Zatiaľčo neriadený dvojpól je charakterizovaný jedinou základnou charakteristikou, zobrazenou v rovine v tvare krivky, je riadený dvojpól charakterizovaný plochou v trojrozmernom priestore (ďalším rozmerom je riadiaca veličina). V rovine základných veličín ho charakterizujeme sústavou charakteristík pre vybrané hodnoty riadiacej veličiny. Vo všeobecnosti, môže byť dvojpól riadený viacerými riadiacimi veličinami. V tomto prípade je charakterizovaný plochou vyššieho stupňa. Na obr. 21 je daná A-V charakteristika otvorenej diódy pre dve teploty ϑ_1 a ϑ_2. Iným príkladom riadeného dvojpólu môže byť tranzistor JFET zapojený medzi kolektorom a emitorom. Riadiacou veličinou je u tohto prípade napätie medzi hradlom a emitorom označené ako u_g.

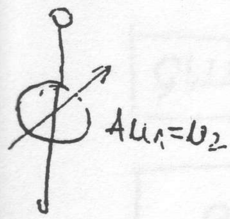


Obr. 21

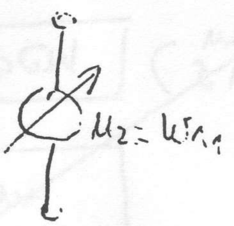


obr. 22 u_{ds}

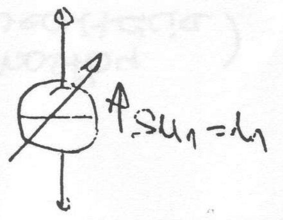
Ideálne zdroje možno riadiť najčastejšie riadiacou veličinou riadiacej zdroje - prúdom a napätím riadenými prúdmi a napätiami znázornené na obr. 23 a 26. Parametre riadených zdrojov A, B, K, S obyčajne reálne čísla. Riadené zdroje sa tiež niekedy nazývajú **závislými zdrojmi.**



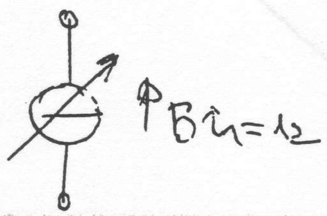
Obr. 23. ZNRN



Obr. 24 ZNRP



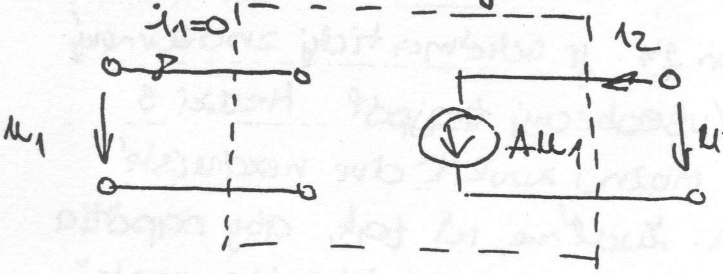
Obr. 25 ZPRN

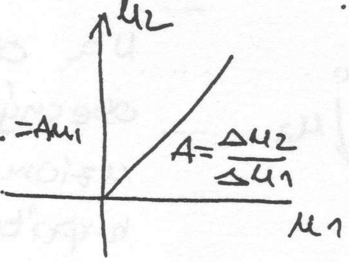


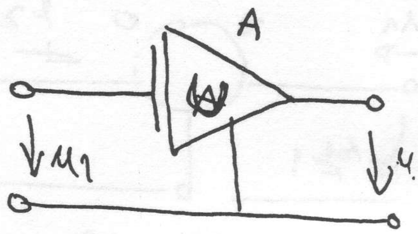
Obr. 26 ZPRP

Řízené zdroje.

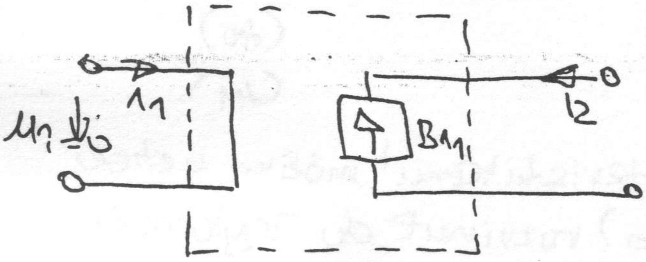
1. ZNRN = ideálny zosilňovač napätia

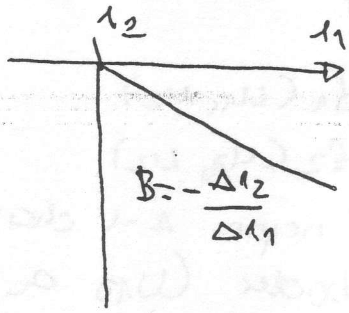


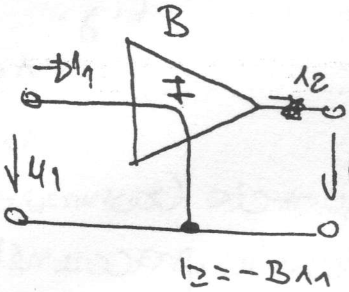




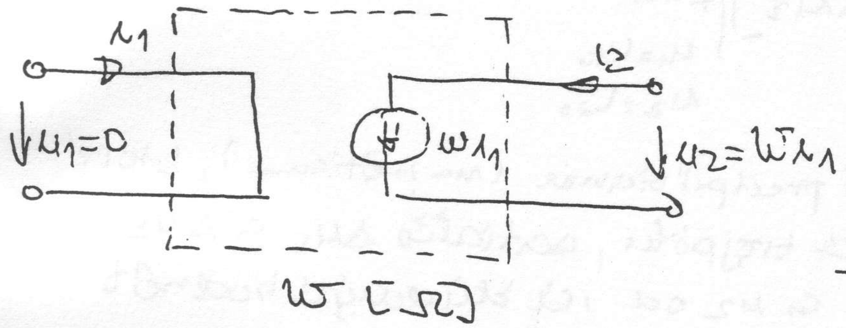
2. ZPRP ideálny zosil. prúdu

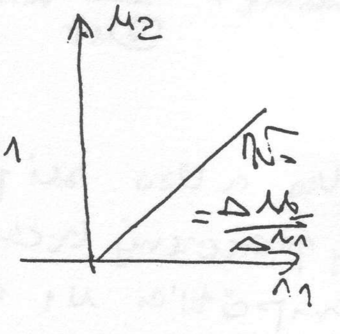


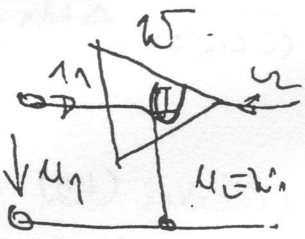




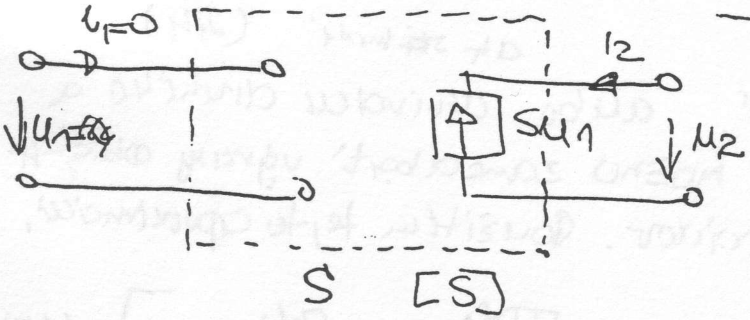
3) ZNPP.

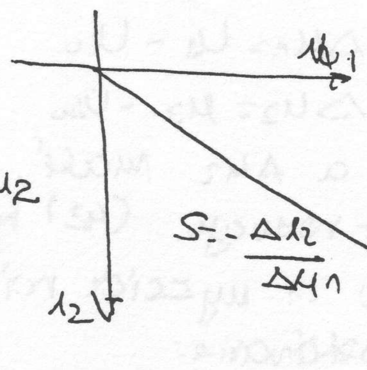


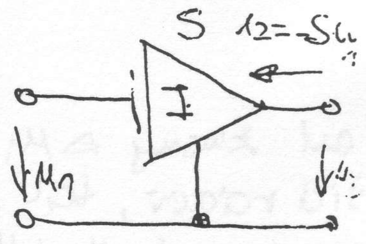




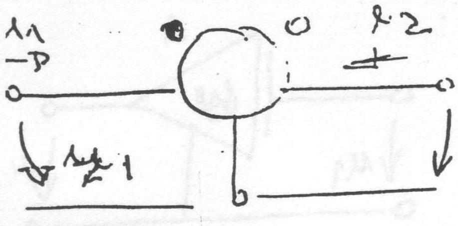
4). ZPRN







2. Trojpóly a mnohopóly. Linearizácia trojpólov.



Obr. 27.

Na obr. 27. je schématicky znázornený obecný/všeobecný trojpól. Medzi 3 uzlami možno zvoliť dve nezávislé napätia. Zvoľme ich tak, aby napätia (u_1, u_2) boli vztiahnuté k tzv. spoločnej svorke (spoločnému uzlu). Ak sú to napätia vonkajších zdrojov, tak trojpólu tečú prúdy i_1 a i_2. Oba prúdy sú závislé na napätiach u_1 a u_2, t. j.

$$i_1 = f_1(u_1, u_2) \quad (40)$$

$$i_2 = f_2(u_1, u_2) \quad (41)$$

funkcie (zobrazené napr. A-V charakteristikami) možno v okolí daného pracovného bodu (U_{10} a U_{20}) rozvinúť do Taylorovho radu

$$i_1 = f_1(U_{10}, U_{20}) + \left\{\left[\frac{1}{1!}\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\Delta u_1 + \frac{1}{1!}\frac{\partial f_1}{\partial u_2}\Delta u_2\right] + \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f_1}{\partial u_1^2}\Delta u_1^2 + \frac{\partial^2 f_1}{\partial u_1 \partial u_2}\Delta u_1 \Delta u_2 + \frac{\partial^2 f_1}{\partial u_2^2}\Delta u_2^2\right]\right\}_{\substack{u_1 = U_{10} \\ u_2 = U_{20}}} + \dots \quad (42)$$

V vzťahu (42) U_{10} a U_{20} sú predpätiami (napätiami), ktoré zadajú kľudový pracovný bod trojpólu, zatiaľčo Δu_1 a Δu_2 udávajú zmeny napätia u_1 a u_2 od ich kľudových hodnôt U_{10} a U_{20}, t. j.

$$\Delta u_1 = u_1 - U_{10} \quad (43)$$

$$\Delta u_2 = u_2 - U_{20} \quad (44)$$

Ak sú zmeny Δu_1 a Δu_2 malé, alebo dostatočne malé, derivácie druhého a vyššieho radu, tak v rovnici (42) možno zanedbať výrazy obsahujúce derivácie druhého a vyšších radov. Použitím tejto aproximácie vo vzťahu (42) dostávame:

$$i_1 = i_1(U_{10}, U_{20}) + \Delta i_1 = f_1(U_{10}, U_{20}) + \left[\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\Delta u_1 + \frac{\partial f_2}{\partial u_2}\Delta u_2\right]_{\substack{u_1 = U_{10} \\ u_2 = U_{20}}} \quad (45)$$

Identickým postupom môžeme pre vyjadrenie prúdu i_2 obdržať/získať tento vzťah:

(XV)

$$i_2 = f_2(U_{10}, U_{20}) + \Delta i_2 = f_2(U_{10}, U_{20}) + \left[\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\Delta u_1 + \frac{\partial f_2}{\partial u_2}\Delta u_2\right]_{\substack{u_1 = U_{10}\\ u_2 = U_{20}}} \qquad (46)$$

Ak budeme uvažovať len zmeny napätí a prúdu od kľudového pracovného bodu (U_{10}, U_{20}), tak platí:

$$\begin{aligned} \Delta i_1 &= y_{11}\,\Delta u_1 + y_{12}\,\Delta u_2 \\ \Delta i_2 &= y_{21}\,\Delta u_1 + y_{22}\,\Delta u_2 \end{aligned} \qquad (47)$$

kde

$$y_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial u_1} = \frac{\partial i_1}{\partial u_1} \qquad y_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial u_2} = \frac{\partial i_1}{\partial u_2}$$

$$y_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial u_1} = \frac{\partial i_2}{\partial u_1} \qquad y_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial u_2} = \frac{\partial i_2}{\partial u_2} \qquad (48)$$

sú **diferenciálne parametre** trojpólu, ktoré majú rozmer vodivosti. Budeme ich nazývať admitančnými parametrami trojpólu. Zavedením diferenciálnych parametrov sme trojpól linearizovali, lebo medzi prúdmi a napätiami /zmenami/ existujú po vyjadrení (47) len lineárne vzťahy. Rovnicu (44) možno zapísať tiež v maticovej forme takto:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Delta i_1 \\ \Delta i_2 \end{bmatrix}}_{I} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}}_{Y} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{bmatrix}}_{U} \qquad (49)$$

$$I = Y\,U \qquad (50)$$

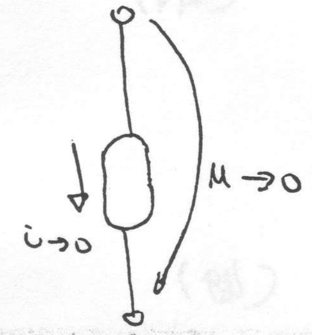
kde I a U sú stĺpcové matice prúdov a napätí, zatiaľ čo Y je štvorcová matica – admitančná linearizovaného trojpólu. Poznamenávame, že trojpól možno popísať tiež inými parametrami než admitančné parametre. Touto otázkou sa budeme zaoberať v jednej z nasledujúcich kapitol.

2.3. Neregulárne obvodové prvky.

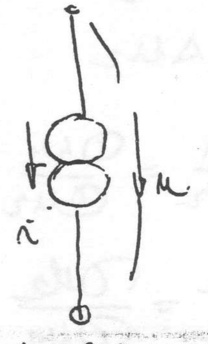
Regulárnosť či neregulárnosť obvodových prvkov je možné posudzovať z rôznejších hľadísk. Veľmi častým kritériom je tu možnosť popisu obvodového prvku pomocou niektorého typu parametrov (napr. použitie

mitančných) (pri ďalšom výklade ~~konvenciu, že~~ bude vždy zdôraznené, v čom spočíva
eregulárnosť jednotlivých druhov obvodových prvkov.

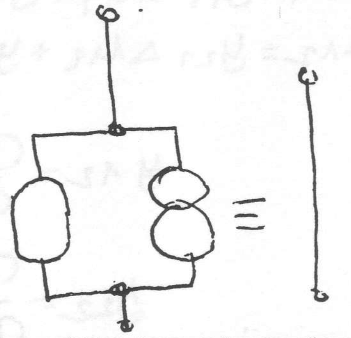
2.3.1. Nulátor a norátor.



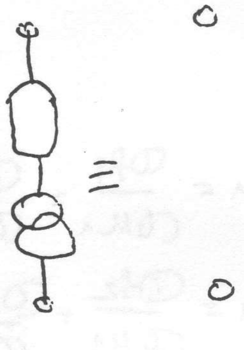
Obr. 28.



obr. 29.



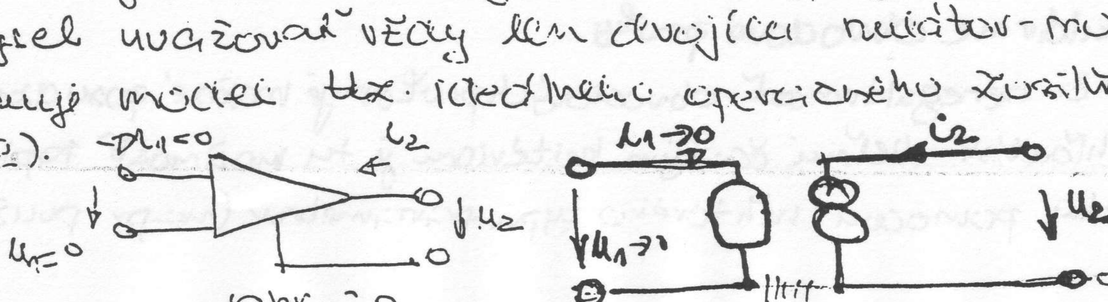
obr. 30



obr. 31

Nulátor a norátor sú tzv. singulárne (degenerované, patologické, hypotetické) dvojpóly, ktoré boli zavedené za účelom jednoduchého modelovania vlastností aktívnych elektrických obvodov.

Nulátor (obr. 28) je dvojpól, ktorým nepreteká žiadny prúd ($i=0$) a na svorkách ktorého je nulové napätie. **Norátor** (obr. 29), je naopak dvojpól, u ktorého napätie nezávisí na pretekajúcom prúde. Oba prvky sa niekedy nazývajú spoločným menom **nulory**. Z ich definície je zrejmé, že v prípade týchto dvojpólov nemá zmysel uvažovať o imitanciách (napr. u norátora určujú veľkosť napätia a prúdu pridružené vonkajšie obvody), čo je dôvodom na to, že tieto obvody zaraďujeme medzi singulárne obvody. Na obr. 30 a obr. 31 je ukázané, ako možno singulárny pár nulátor-norátor použiť na modelovanie dvojpólov s limitnými vlastnosťami, t.j. skratu a nekonečne veľkej impedancie. Jednotlivé singulárne dvojpóly nemožno realizovať, má zmysel uvažovať vždy len dvojicu nulátor-norátor, ktorá realizuje model tzv. ideálneho operačného zosilňovača (obr. 32).



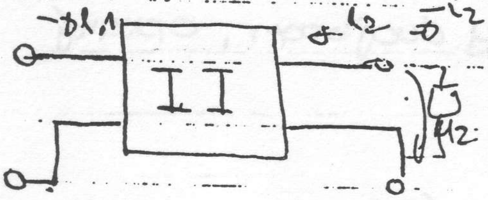
obr. 32.

hybridná matica

(22)

(transformácia f. blaty, druhy).

1.2.3.2. Imitančné invertory.



Obr. 33.

Imitančný invertor (obr. 33) je lineárny dvojbran popísaný kaskádnymi rovnicami, ktorých maticový tvar (čísla) (ni feely)!

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} \qquad (51)$$

$u_1 = a_{12}\, i_2$

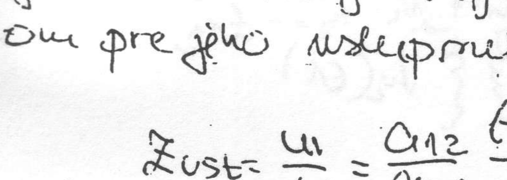
Zvláštnosť tohto prvku spočíva v tom, že ho nemožno opísať sério-paralelnými a paralelne-sériovými parametrami. Vzťahy medzi napätím u_1 a prúdom i_2 (i_1 a u_2) dané vzťahom (51) neovplyvní ani pripojenie vonkajších obvodov k II. Kaskádnej matici použitej vo vzťahu (51) zodpovedajú tieto impedančné a admitančné matice:

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} \\ \frac{1}{a_{21}} & 0 \end{bmatrix} \quad (52) \qquad Y = \begin{bmatrix} 0 & a_{21} \\ -\frac{1}{a_{12}} & 0 \end{bmatrix} \quad (53)$$

Ak je II zaťažený na výstupnej bráne dvojpólom o impedancii Z_Z, potom pre jeho vstupnú impedanciu platí:

$$Z_{vst} = \frac{u_1}{i_1} = \frac{a_{12}}{a_{21}} \frac{(-i_2)}{u_2} = \frac{a_{12}}{a_{21}} \frac{1}{\left(-\frac{u_2}{i_2}\right)} = \frac{a_{12}}{a_{21}} \frac{1}{Z_Z} \qquad (54)$$

Zo vzťahu (54) je zrejmé, že vstupná impedancia je úmerná prevrátenej /inverznej hodnote zaťažovacej impedancie (odtiaľ aj imitančný invertor). Podľa znamienka konštanty úmernosti k_{21} sa potom hovorí buď o **pozitívnom alebo negatívnom imitančnom invertore.** Z imitančných matíc (52) a (53) vyplýva hneď možnosť konštrukcie modelov imitančných invertorov. Obr. 34 je napr. nakreslený model invertora II, obsahujúci dva antiparalelne zapojené zdroje prúdu riadené napätím.

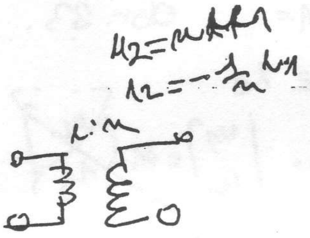


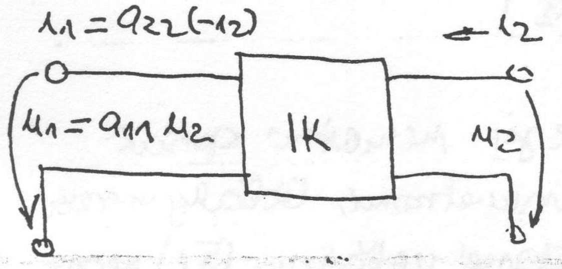
Obr. 34

1.2.3.3. Imitančné konvertory.

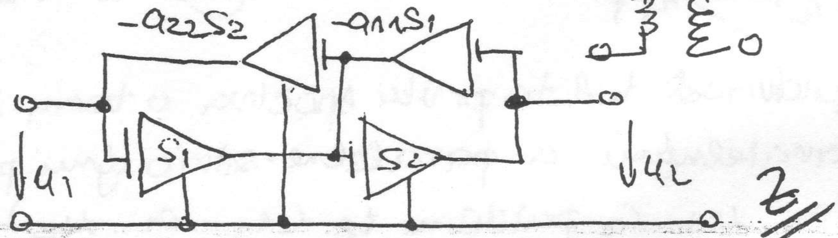
Imitančný konvertor (obr. 36) je lineárny dvojbran, opísaný kaskádnymi ~~p...~~ rovnicami v tvare

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} \qquad (60)$$





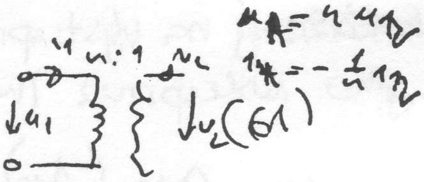
obr. 36



obr. 34.

Pretože kaskádna matica A vo vzťahu (60) je diagonálna, nie je možné IK popísať ani impedančnými ani admitančnými parametrami (príslušné matice neexistujú). Vzťahy medzi napätiami u_1 a u_2 i medzi prúdmi i_1 a i_2 dané maticovou rovnicou (60) zostanú už zachované i po pripojení vonkajších obvodových prvkov. IK sa preto správajú medzi tzv. transformačné články. Vstupná impedancia IK zaťaženého impedanciou Z_z je zrejme

$$Z_{vst} = \frac{u_1}{i_1} = \frac{a_{11}}{a_{22}} \left(\frac{u_2}{-i_2}\right) \frac{a_{11}}{a_{22}} Z_z \qquad (61)$$



Podľa znamienka pomeru a_{11}/a_{22} sa IK rozdeľujú na **pozitívne a negatívne**. Zo vzťahu (61) je zrejmé, že vstupná impedancia je úmerná hodnote zaťažovacej impedancie (odtiaľ názov imitančný konvertor) t.j. IK prevádza imitanciu na imitanciu rovnakého typu. Pasívny IK môže byť recipročný, ak $a_{11} = 1/a_{22}$. V tomto prípade platí $a_{11} = 1/n$, $a_{22} = n$ pričom IK reprezentuje tzv. ideálny transformátor. Ak je $a_{11} \neq \frac{1}{a_{22}}$, hovoríme o tzv. aktívnom transformátore ($a_{11} = 1/n_1$, $a_{22} = n_2$, $n_1 \neq n_2$) resp. o tzv. **ideálnom meniči výkonu** ($a_{11} = 1/A$, $a_{22} = 1/B$, $A, B > 0$), ktorého schematická značka je naznačená na obr. 38. Pre okamžitý výkon na vstupnej bráne IMV je zrejme

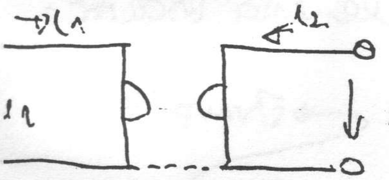
Jedným z dôvodov využívania neregulárnych dvojbranov je tiež možnosť ulácií induktívneho charakteru bez použitia klasických cievok, čo je ežité i z hľadiska miniaturizácie elektronických zariadení pomocou moderných technológií. Pre tento účel, sa hodí práve PII, keďže pre

$$\dot{Z} = \frac{1}{j\omega C} \qquad (55)$$

$$\dot{Z}_{vst} = j\omega \frac{a_{12}}{a_{21}} C = j\omega L_e \qquad (56)$$

$$L_e = \frac{a_{12}}{a_{21}} C \qquad (57)$$

bo pre ekvivalentnú induktnosť $L_e > 0$ musí platiť $a_{12}/a_{21} > 0$. ruhý krát, bol tento obvodový prvok popísaný Tellegenom (1948), a je my ako **ideálny gyrátor**. Jeho schématická značka je uvedená na Obr. 35. Ich imitančné matice sa spravidla píšu v tvare (o.v.)



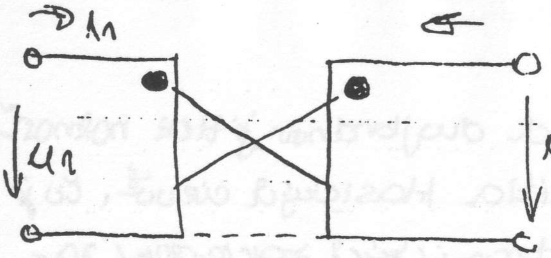
Obr. 35.

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & -w_2 \\ w_1 & 0 \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} 0 & S_1 \\ -S_2 & 0 \end{bmatrix} \qquad (58)$$

w_1 a w_2 sú tzv. gyračné odpory, a S_1 a S_2 sú tzv. gyračné vodivosti. Celkový okamžitý výkon gyrátora je vo všeobecnosti daný vzťahom:

$$u_1 i_1 + u_2 i_2 = -w_2 i_2 \cdot \frac{u_2}{w_1} + u_2 i_2 = \left(1 - \frac{w_2}{w_1}\right) u_2 i_2 \qquad (59)$$

platí: $w_1 = w_2$, je $p = 0$, tak gyrátor predstavuje stratový prvok. Ak $p > 0$ t.j. ak $w_1 > w_2$, tak gyrátor činným prvkom. V prípade, že platí $w_2 > w_1$ je $p < 0$ a rátor má naopak charakter aktívneho prvku.



Obr. 38

$$P_2 = u_2(-i_2) = \frac{u_1}{a_{11}} \frac{i_1}{a_{22}} = = AB\, u_1 i_1 = AB\, P_1 \qquad (62)$$

25

t.j. výkon na výstupnej bráne je $A.B$ - krát väčší, než vstupný výkon. NIK je vždy prvkom nerecipročným, nakoľko znamienka parametrov a_{11} a a_{22} sú rôzne. Podľa toho, ktorý z týchto parametrov je záporný ide o **napäťový typ** ($a_{11} = -k_2$, $a_{22} = 1/k_1$) alebo o prúdový typ ($a_{11} = k_2$, $a_{22} = -1/k_1$). Z rovnice (61) plynie, že pre simuláciu impedancií induktívneho charakteru je vhodný práve NIK, lebo pre $Z_Z = \frac{1}{j\omega C}$ je vstupná impedancia

$$Z_{vst} = \frac{a_{11}}{j\omega C a_{22}} = j\omega\left(\frac{-a_{11}}{\omega^2 C a_{22}}\right) = j\omega L_e(\omega) \qquad (63)$$

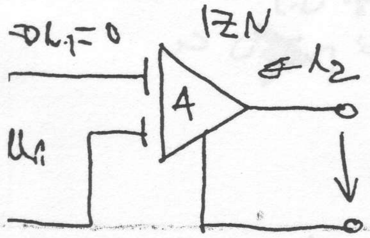
a pre $L_e(\omega) > 0$ musí byť $a_{11}/a_{22} < 0$. (Ekvivalentná induktívnosť je v tomto prípade závislá na frekvencii.

ostrovpóly.

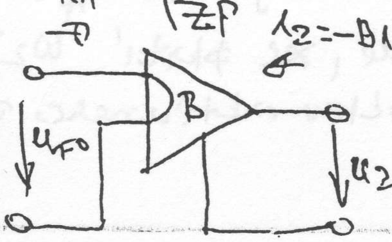
2.3.4. Ideálne zosilňovače a riadené zdroje ako neregulárne

Ak niektorý z nasledujúcich parametrov (a_{11}, a_{22}) IK je rovný nule, stráca prvok charakter konvertora. Tieto zvláštne prípady potom predstavujú tzv. **ideálne zosilňovače.**

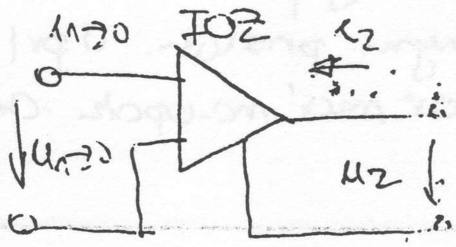
Ideálny zosilňovač napätia (obr.39) má $a_{11} = 1/A$ a $a_{22} = 0$ a ide vlastne o ZNRN. **Ideálny zosilňovač prúdu** má naopak (obr.40), $a_{11} = 0$, $a_{22} = 1/B$, takže ide vlastne o ZPRP. **Ideálny operačný zosilňovač** (obr.41) je prvok, pre ktorý $a_{11} = a_{22} = 0$, takže ho možno považovať za limitný prípad oboch predchádzajúcich zosilňovačov, ak ich zosilnenie rastie nad všetky medze ($A \to \infty$, $B \to \infty$).



Obr. 39
IZN



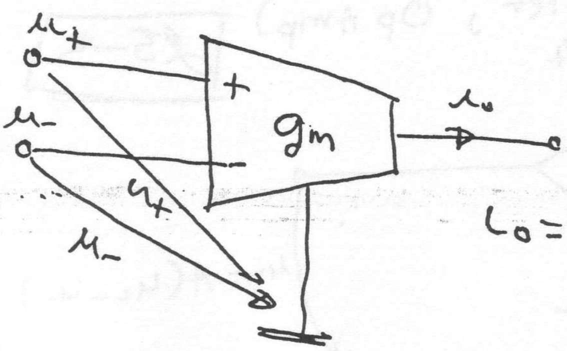
obr. 40



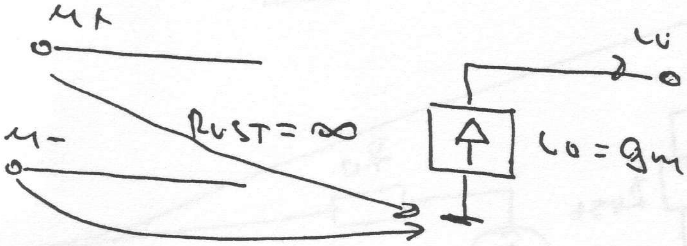
Obr. 41

Operačné transkonduktančné OZ 25/2

(Operational Transconductance Amplifier - OTA)



$$i_o = g_m(u_+ - u_{-1})$$



$$i_o = g_m(u_+ - u_-)$$

<u>transkonduktans</u>

Imitančné konvertory:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

$$i_1 = a_{21}u_2 - a_{22}i_2 \qquad u_2 = z_{21}i_1 + z_{22}i_2$$

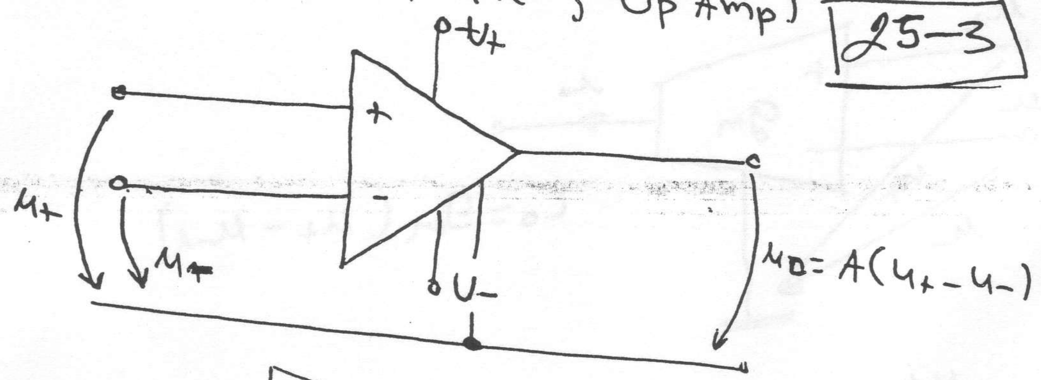
$$a_{21}u_2 = i_1 + a_{22}i_2$$

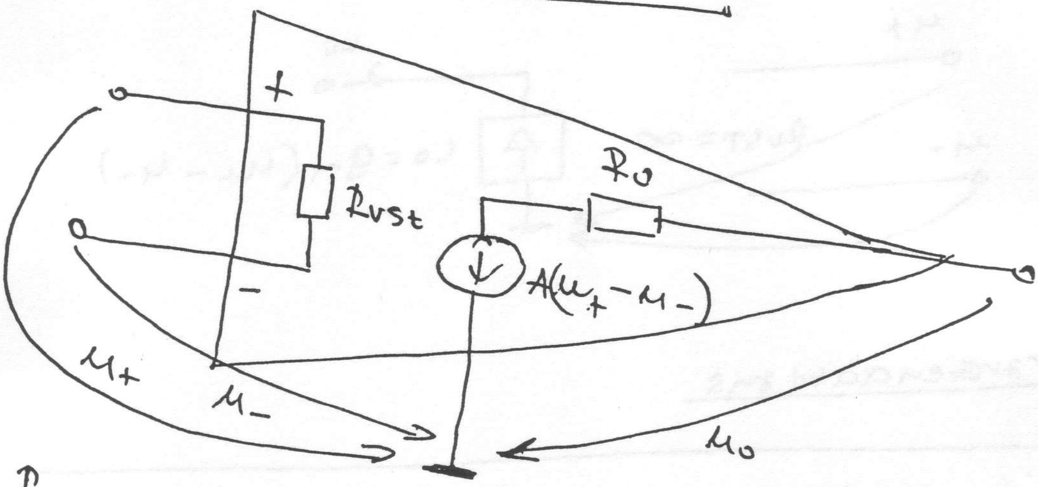
$$u_2 = \frac{1}{a_{21}} i_1 + \frac{a_{22}}{a_{21}} i_2$$

$0 \rightarrow Z$ - neexistuje.

Operačné zosilňovače s diferenciálnym vstupom:

(Operational Aplifier, Op Amp) $\boxed{25-3}$





IOZ: $R_{VST} \to \infty$, $R_0 = 0$, $A \to \infty$

10–1000MΩ 10Ω 200 000

Reálne OZ:

- konečné hodnoty, R_{VST}, $R_{výst}$, A
- frekvenčne závislý zisk
- neideálne šumové vlastnosti,
- atď.

2. Analýza lineárnych obvodov s regulárnymi n-pólmi.

V predmetoch "Úvod do teórie inžinierstva" a "Teória obvodov I" ste sa naučili analyzovať sústavy elektrických obvodov, ktoré obsahujú lineárne dvojpóly, metódou Kirchhoffových zákonov, metódou slučkových prúdov a metódou uzlových napätí. Priama aplikácia Kirchhoffových zákonov nie je pre výpočty výhodná, pretože musíme riešiť $\underline{\underline{v}}$ lineárnych rovníc, kde $\underline{\underline{v}}$ je počet vetiev sústavy. Neznámymi, t.j. hľadanými veličinami, sú prúdy v jednotlivých vetvách sústavy. Ak analyzovaná sústava obsahuje n-uzlov, musíme napísať $p=n-d$ rovníc dľa I KZ a $S=v-p$ rovníc podľa II. KZ. d - tu reprezentuje cel separátnych častí sústavy. Menším počtom rovníc možno analyzovanú sústavu popísať pri použití metódy slučkových prúdov alebo metódy uzlových napätí.

V ďalšom si pouvedané dve metódy zopakujeme, a potom ich zovšeobecníme pre rádioelektronické obvody obsahujúce regulárne n-póly. V ďalšej kapitole, si budeme zaoberať analýzou lineárnych obvodov s neregulárnymi n-pólmi.

1. Metóda slučkových prúdov.

1. Základné rovnice.

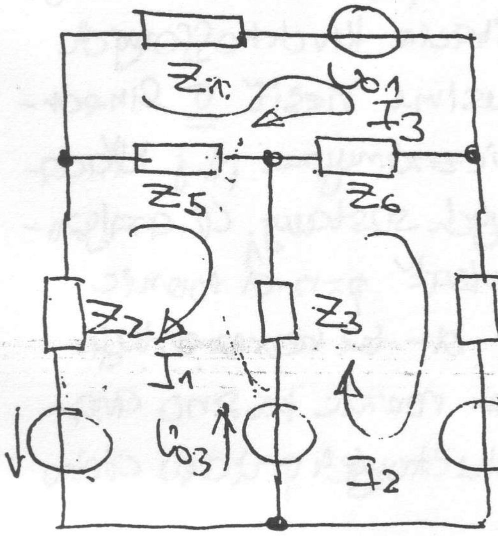
Aby sme mohli zmenšiť počet lineárnych rovníc nutných pre analýzu obvodu, budeme uvažovať len nezávislé slučky, ktorých je

$$S=v-p \tag{E4}$$

S je počet nezávislých slučiek, v je počet vetiev a p je počet nezávislých uzlových párov. Uvažujme ďalej el. obvod zložený len z zdrojov. LEN ZDROJE NAPÄTIA.

Okrem pojmu **slučkový prúd**, zavedieme ďalej termín **slučkové napätie.** Slučkové napätie sa rovná záporne vzatému algebraickému súčtu svorkových napätí všetkých zdrojov napätí v slučke. Pretože nezávislé slučky aplikujeme len 2KZ, prepočítame najskôr všetky prúdy na ekvivalentné zdroje napätia. Potom určím s nezá- ... slučkové prúdy.

ktoré považujeme za hľadané veličiny. Kladný smer slučkových prúdov, môžeme orientovať ľubovoľne. Obyčajne však volíme smery všetkých slučkových prúdov rovnaké. Slučkové prúdy označíme indexami 1, 2, …, s (t.j. $I_1, I_2, \dots, I_s$). Pre každú slučku napíšeme 2KZ, čím obdržíme s lineárnych nezávislých rovníc.



Obr. 42.

Ako príklad uvažujme schému nakreslenú na obr. 42. Pre zvolené nezávislé slučky napíšeme 2KZ:

$$\left.\begin{array}{ll} I_1: & Z_5(I_1-I_3)+Z_3(I_1-I_2)-U_{03}+Z_2I_1-U_{02}=0 \\ I_2: & Z_6(I_2-I_3)+U_{04}+Z_4I_2+U_{03}+Z_3(I_2-I_1)=0 \\ I_3: & Z_1I_3+U_{01}+Z_6(I_3-I_2)+Z_5(I_3-I_1)=0 \end{array}\right\} \quad (64)$$

Tieto rovnice možno potom zapísať v prehľadnej maticovej forme:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} U_{02}+U_{03} \\ -U_{03}-U_{04} \\ -U_{01} \end{bmatrix}}_{U} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \underbrace{\begin{bmatrix} Z_2+Z_3+Z_5 & -Z_3 & -Z_5 \\ -Z_3 & Z_3+Z_4+Z_6 & -Z_6 \\ -Z_5 & -Z_6 & Z_1+Z_5+Z_6 \end{bmatrix}}_{Z} \underbrace{\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}}_{I} \quad (65)$$

Rovnicu (65) môžeme skrátene zapísať v tomto tvare

$$U = Z\, I \quad (66)$$

kde U stĺpcová matica slučkových napätí, I je stĺpcová matica hľadaných slučkových prúdov a Z je tzv. impedančná matica analyzovanej obvodovej sústavy. Rovnica (66) platí pre ľubovoľný počet nezávislých slučiek. Matica Z je regulárna matica (t.j. $\det Z \neq 0$). Vzhľadom na to, možno vektor neznámych veličín I, určiť z rovnice (66) tak, že celú rovnicu násobíme inverznou maticou Z^{-1} zľava. Potom platí:

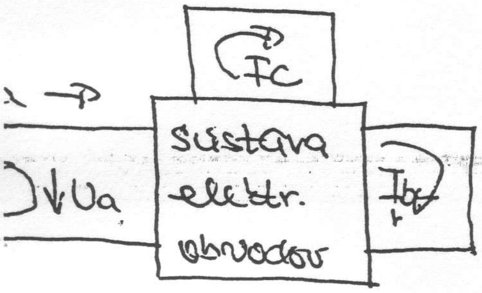
$$I = Z^{-1} U \quad (67)$$

Jednotlivé zložky vektora I napr. ~~vektor~~ prúd I_1, možno určiť priamo použitím Cramerovho pravidla tak, že:

(28)

$$I_k = \frac{1}{\Delta}\left[\Delta_{1:k}U_1 + \Delta_{2:k}U_2 + \cdots + \Delta_{s:k}U_s\right] \qquad (68)$$

de symbol Δ označuje determinant impedančnej matice Z, zatiaľ symbol $\Delta_{i:k}$ je jeho algebraický doplnok, ktorý sa rovná $(-1)^{\alpha}$ násobku determinantu matice, ktorú dostaneme z matice Z tak, že vynecháme jej i-tý riadok a k-tý stĺpec. Symbol α značí počet nepárnych čísel medzi indexmi algebraického doplnku. Ak je sústava napájaná len jedným zdrojom napätia U_a (obr. 43) je prúd v slučke b-čiary vzťahom



obr. 43.

$$I_b = \frac{\Delta_{a:b}}{\Delta} U_a \qquad (69)$$

Pomocou rovnakého predpisu môžme vypočítať i prúd I_a

$$I_a = \frac{\Delta_{a:a}}{\Delta} U_a \qquad (70)$$

rovnice (70) možno vypočítať vstupnú impedanciu sústavy pomocou vzťahu

$$Z_{vst} = \frac{U_a}{I_a} = \frac{\Delta}{\Delta_{a:a}} \qquad (71)$$

ak nás zaujíma prenos prúdu, definujeme ako pomer prúdu v slučke b k prúdu v vstupnej slučke a:

$$K_i = \frac{I_b}{I_a} \qquad (72)$$

. 43. Hľadaný pomer dostaneme z rovníc (69) a (70) v tvare

$$K_i = \frac{I_b}{I_a} = \frac{\Delta_{a:b}}{\Delta_{a:a}} \qquad (73)$$

y sme chceli vypočítať pomer prúdov I_c / I_b, vypočítame prúd pomocou vzťahu

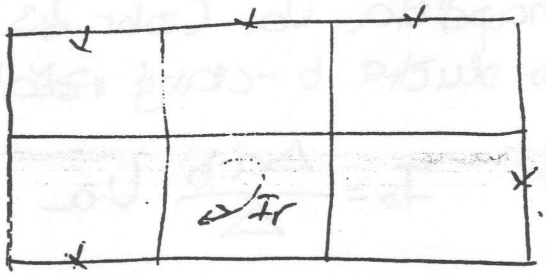
$$I_c = \frac{\Delta_{a:c}}{\Delta} U_a \qquad (74)$$

[illegible] (69) [illegible]

29

① 29

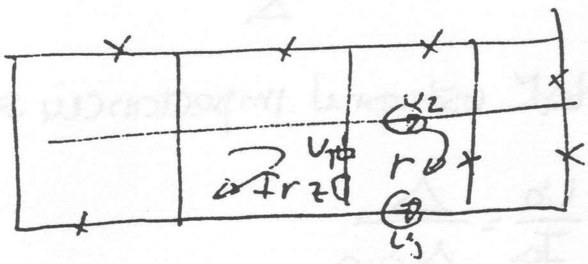
$$Z_{rr} = \frac{U_r}{I_r} \quad I_k = 0 \quad k = 0, 1, \dots, r-1, r+1, \dots s$$



ULASTNA IMPEDANCIA

$$U_r = \left(\sum Z_i\right) I_r ; \quad Z_{rr} = \sum Z_i$$

②



$$U_2 - U_3 - U_1 - I_k Z = 0$$

$$-I_k Z = -U_2 + U_3 + U_1 = U_{r0}$$

$$-Z = \frac{U_r}{I_K} = \underline{\underline{Z_{rk}}}$$

VZÁJOMNÁ IMPEDANCIA

I_c a I_b, dostávame vzťah

$$\frac{I_c}{I_b} = \frac{\Delta a:c}{\Delta a:b} \qquad (75)$$

2.1.2. Impedančná matica sústavy.

Ukázali sme, že stĺpcovú maticu slučkových prúdov zostavujeme tak, že do matice usporiadame zvolené slučkové prúdy $I_1, I_2, \dots, I_s$. Rovnako stĺpcovú maticu slučkových napätí zostavujeme jednoducho. Každé slučkové napätie sa rovná súčtu svorkových napätí zdrojov jednotlivých slučiek, pričom s kladným znamienkom napíšeme napätia orientované proti šípke slučkového prúdu, so záporným znamienkom napíšeme napätia, ktoré súhlasia s kladným smerom slučkového prúdu. Zložitou otázkou je tu zostavenie matice Z. Jednou z možností je napísať KZ pre zvolené nezávislé slučky a tieto prepísať do maticového tvaru. Pokúsme sa však nájsť vhodnejší algoritmus pre zostavenie impedančnej matice Z.

Ak si pozornejšie všimneme impedančnú maticu v rovnici (65), zistíme, že Z je súmerná podľa hlavnej diagonály. Je to preto, lebo prvky R, L, C sú recipročné / reciproké. Prvky matice Z môžme definovať ako sústavy rovníc (64), ktorú zapíšeme v tvare

$$\begin{aligned}
U_1 &= z_{11} I_1 + z_{12} I_2 + \dots + z_{1s} I_s \\
U_2 &= z_{21} I_1 + z_{22} I_2 + \dots + z_{2s} I_s \qquad (76) \\
&\vdots \\
U_s &= z_{s1} I_1 + z_{s2} I_2 + \dots + z_{ss} I_s
\end{aligned}$$

Prvky impedančnej matice budeme označovať malými písmenami, aby sme ich nezamieňali so symbolmi pre impedanciu). Zo sústavy rovníc (76), môžme definovať prvky v hlavnej diagonále matice Z takto:

$$z_{rr} = \left(\frac{U_r}{I_r}\right)_{I_k=0} \quad (k = 1, 2, \dots, s;\ k \neq r) \qquad (77)$$

Prvok z_{rr} leží v r-tom riadku a r-tom stĺpci matice Z. Podmienka $I_k = 0$ pre $k = 1, 2, \dots, s$ $k \neq s$, znamená, že určitslučky okrem r-tej, sú rozpojené. Preto každý prvok v hlavnej diagonále Z sa rovná súčtu impedancií v slučke, ktorá je označená rovnako ako riadok (stĺpec) matice, v ktorom leží prvok. Impedanciu Z_{rr} nazývame **vlastnou impedanciou slučky r**.

Analogicky môžme definovať i ľubovoľný prvok mimo hlavnej diagonály:

$$Z_{rm} = \left(\frac{U_r}{I_m}\right)_{I_k=0} \quad k=1,2,\dots s,\ k\neq m) \quad (78)$$

Keďže v tomto prípade predpokladáme, že sú rozpojené všetky slučky okrem m-tej, je

$$Z_{rm} = \pm Z_{rm} \quad (79)$$

Z (78) a (79) vidíme, že prvok Z_{rm} matice Z sa rovná impedancii, ktorá je spoločná pre slučky r a m. Túto impedanciu nazývame **vzájomnou impedanciou slučiek r a m**. Znamienko Z_{rm} závisí od orientácie prúdov I_r a I_m. Ak orientácia prúdov je rovnaká/rôzna je znamienko impedancie Z_{rm} kladné/záporné.

1.3. Transformácia súradníc.

Pod pojmom súradnice chápeme závislé a nezávislé premenné, t.j. napätia a prúdy. Uvažujme sústavu obvodov, v ktorej sú s nezávislé slučkové prúdy, ktoré zostavíme do stĺpcovej matice $\tilde{I}$. Potom pre slučkové napätia, reprezentované vektorom $\tilde{U}$ a vektorom $\tilde{I}$, možno písať túto rovnicu:

$$\tilde{U} = \tilde{Z}\tilde{I} \quad (80)$$

Ak zvolíme v tejto sústave iné nezávislé slučkové prúdy ($\tilde{I}$), pre analyzovanú sústavu platí iná, napr. táto maticová rovnica:

$$U = ZI \quad (81)$$

Medzi pôvodnými a novými slučkovými prúdmi platí vzťah

$$\tilde{I} = CI \quad (82)$$

kde C je transformačná matica prúdov. Podobne, možno vyjadriť nové slučkové napätia pomocou pôvodných slučkových napätí

$$U = D\tilde{U} \quad (83)$$

kde D je transformačná matica. Dosadením (82) a (83) do (81) ostávame vzťah

$$U = D\tilde{U} = D\tilde{Z}\tilde{I} = D\tilde{Z}CI = ZI \qquad (84)$$

e

$$Z = D\tilde{Z}C \qquad (85)$$

znamenávame, že vzťah (85) obdržíme porovnaním vzťahov (84) a (81). Rovnica (85) popisuje regulárnu transformáciu matice $\tilde{Z}$ maticu Z, resp. opačne. Teraz ukážeme, aký je vzťah medzi incidenčnými maticami D a C. Pretože rovnica (80) a (81) popisuje ten istý obvod, z čoho plynie, že súčet okamžitých výkonov zostane byť v oboch prípadoch rovnaký, t.j. musí platiť:

$$p = \tilde{U}^T\tilde{I} = U^T I \qquad (86)$$

Použitím vzťahu (82), možno prúd I vyjadriť tiež takto:

$$I = C^{-1}\tilde{I} \qquad (87)$$

Dosadením (81) a (87) do (86) potom dostaneme:

$$\tilde{U}^T\tilde{I} = U^T I = (D\tilde{U})^T (C^{-1}\tilde{I}) = \tilde{U}^T D^T C^{-1}\tilde{I} = \tilde{U}^T E\tilde{I} \qquad (88)$$

vzťahov (86) a (88) potom plynie

$$D^T C^{-1} = E \qquad (89)$$

e E je jednotková štvorcová matica. Zo vzťahu (89) môžeme vyjadrenie súvislosti medzi maticami D a C obdržať tieto vzťahy

$$C = D^T \qquad (90)$$

$$D = C^T \qquad (91)$$

Dosadením (90) do (85) a (83) dostaneme vzťahy

$$Z = C^T\tilde{Z}C \qquad (92)$$

$$U = C^T\tilde{U} \qquad (93)$$

Transformácie pravej strany rovníc (92) a (93) možno previesť tiež pomocou klasického násobenia matíc, a to podľa algoritmu, ktorý v ďalšom opíšeme.

Uvažujme súčin 3 matíc

$$D(p,k) = A(p,q)\,B(q,m)\,C(m,k) \qquad (94)$$

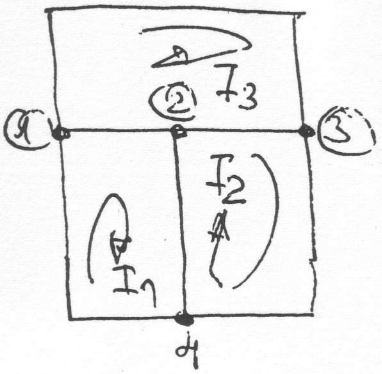
kde dvojica písmen v zátvorke udáva typ matice. Jednoducho možno odvodiť, že pre prvok d_{rs} matice D platí

$$d_{rs} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{q} a_{ri}\, c_{js}\, b_{ij} \qquad (95)$$

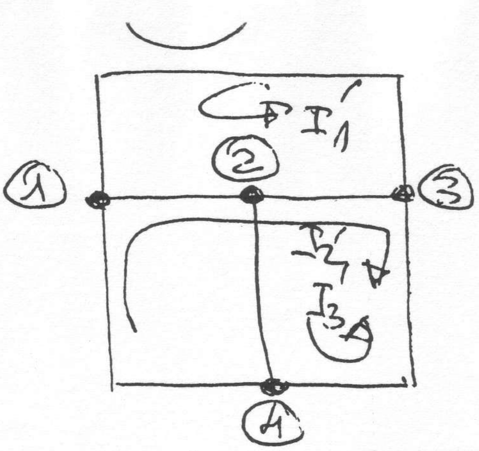
Pre stanovenie prvku d_{rs}, možno potom použiť tento algoritmus. Začiac so vzťahom (95), si poznamenávame k r-tému riadku výslednej matice D prvky, ktoré ležia v r-tom riadku matice A, a ku každému prvku poznamenávame do zátvorky, v ktorom ~~riadku~~ stĺpci matice A leží. Nulové prvky matice A a C k riadkom ani k stĺpcom neznačíme. K s-tému stĺpcu výslednej matice D poznamenáme ~~do zátvorky~~ tie prvky matice C, ktoré ležia v s-tom stĺpci. Prvok d_{rs} dostaneme tak, že vynásobíme každý prvok matice A poznačený pri riadku r s každým prvkom matice C poznamenaným pri stĺpci s. Každý takto získaný súčin násobíme prvkom matice B, ležiacim v riadku označenom v zátvorke násobenca z matice A a v stĺpci poznačenom pri činiteli matice C. Prvok d_{rs} potom dostaneme takto:

$$\begin{array}{r|l}
 & s: c_{1s}(1),\ c_{2s}(2),\ \dots,\ c_{ms}(m) \\
\hline
 & a_{r1} c_{1s} b_{11} + a_{r1} c_{2s} b_{12} + \dots + a_{r1} c_{ms} b_{1m} + \\
r: a_{r1}(1), a_{r2}(2), \dots, & \\
a_{rq}(q) & + a_{r2} c_{1s} b_{21} + \dots + \\
 & + \dots + a_{rq} c_{ms}(m)\, b_{qm}
\end{array}$$

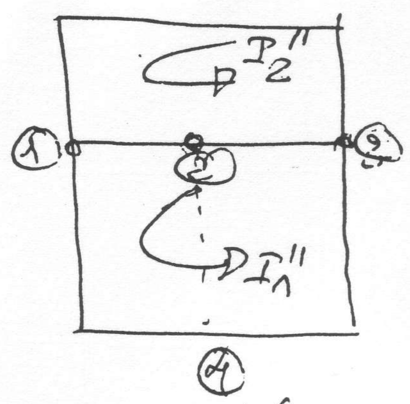
Vyššie opísaný algoritmus budeme ilustrovať na príklade z teórie obvodov. Pre obvod podľa 42. obr., ktorého slučkové prúdy spätne načrtneme na topologickej schéme podľa obr. 44 poznáme matice U a matice U' a Z' pre slučkové prúdy podľa obr. 45. Môžeme z uvedených matíc získať takto: Najprv vyjadríme pôvodné slučkové prúdy (I) pomocou nových zvolených slučkových prúdov (I'), z ktorých ...



obr. 44.

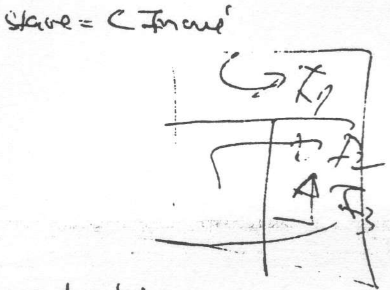


Obr. 45



obr. 46.

$$I_1 = I_2'$$
$$I_2 = I_2' - I_3'$$
$$I_3 = -I_1'$$



ieto rovnice môžeme zapísať v maticovej forme takto:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1' \\ I_2' \\ I_3' \end{bmatrix} \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matica nových slučkových napätí potom dostaneme podľa vzťahu

$$U' = C^T U$$

to násobenie matíc $C^T U$ realizujeme podľa opísaného algoritmu takto:

$$U' = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} U_{02}+U_{03} \\ -U_{03}+U_{04} \\ -U_{01} \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c} 1' \ (-3) \\ U' = 2' \to (1)\ (2) \\ 3' \ (-2) \end{array} \begin{bmatrix} U_{01} \\ U_{02}-U_{04} \\ U_{03}+U_{04} \end{bmatrix}$$

$$I_{(1)} = I_2'$$
$$I_{(2)} = I_2' - I_3'$$
$$I_3 = -I_1'$$

$\tilde{Z} = C^T Z U$

$\tilde{I} = C^T I$

$U = D\tilde{U}$

Analogicky postupujeme pri násobení 3-matíc:

$$Z' = C^T Z C$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

35

$$U = C^T \tilde{U} \qquad Z = C^T \tilde{Z} C$$

$$U = C^T E \tilde{U}$$

$$\tilde{u}_{11}\ (\tilde{1}) : U_{02} + U_{03}$$

$$\tilde{u}_{21}\ (\tilde{2}) : -U_{03} - U_{04}$$

$$\tilde{u}_{31}\ (\tilde{3}) : -U_{01}$$

$$U = \begin{array}{c} -(\tilde{3}) \\ (\tilde{1})(\tilde{2}) \\ -(\tilde{2}) \end{array} \begin{bmatrix} U_{01} \\ U_{02} - U_{04} \\ U_{03} + U_{04} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{I}_1 = I_2$$

$$\tilde{I}_2 = I_2 - I_3$$

$$\tilde{I}_3 = -I_1.$$

$$\tilde{Z} = \begin{array}{c|ccc} & -(3) & (1)(2) & -(2) \\ \hline -(3) & Z_2+Z_3+Z_5 & -Z_3 & -Z_5 \\ (1)(2) & -Z_3 & Z_3+Z_4+Z_6 & -Z_6 \\ -(2) & -Z_5 & -Z_6 & Z_1+Z_5+Z_6 \end{array}$$

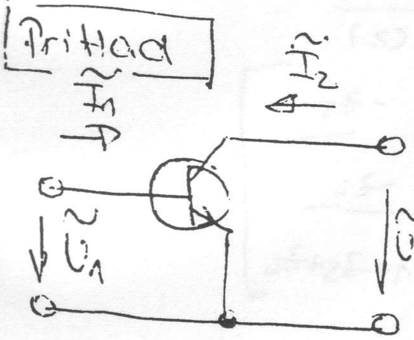
$$Z = \begin{array}{c|ccc} & -(\tilde{3}) & (\tilde{1})(\tilde{2}) & -(\tilde{2}) \\ \hline -(\tilde{3}) & Z_1+Z_5+Z_6 & Z_5+Z_6 & -Z_6 \\ (\tilde{1})(\tilde{2}) & Z_5+Z_6 & Z_2+Z_4+Z_5+Z_4 & Z_3 - \cancel{Z_3} - Z_4 - Z_6 \\ -(\tilde{2}) & -Z_6 & Z_3 - \cancel{Z_3} - Z_4 - Z_6 & Z_3+Z_4+Z_6 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1': -(3) & 2': (1),(2) & 3': -(3) \end{array} \\ Z' = \begin{array}{c} 1': -(3) \\ 2': (1)(2) \\ 3': -(2) \end{array} & \left[\begin{array}{c|c|c} \quad & \quad & \quad \end{array} \right] \end{array} \qquad Z = \left[\quad \right.$$

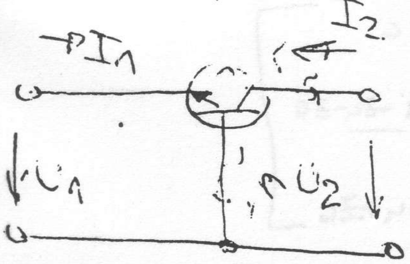
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1: & 2: & 3: \end{array} \\ Z = \begin{array}{c} 1: \\ 2: \\ 3: \end{array} & \begin{bmatrix} Z_2+Z_3+Z_5 & -Z_3 & -Z_5 \\ -Z_3 & Z_3+Z_4+Z_6 & -Z_6 \\ -Z_5 & -Z_6 & Z_1+Z_5+Z_6 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1': -(3) & 2': (1)(2) & 3': -(2) \end{array} \\ Z' = \begin{array}{c} 1': -(3) \\ 2': (1)(2) \\ 3': -(2) \end{array} & \left[\begin{array}{c|c|c} Z_1+Z_5+Z_6 & Z_5+Z_6 & -Z_6 \\ \hline Z_5+Z_6 & \begin{array}{c} Z_2+Z_3+Z_5-Z_3-Z_3+ \\ +Z_3+Z_4+Z_6 = Z_2+Z_4+Z_5+Z_6 \end{array} & \begin{array}{c} Z_5-Z_3-Z_4 \\ -Z_6 \end{array} \\ \hline -Z_6 & Z_3-Z_3-Z_4-Z_6 & Z_3+Z_4+Z_6 \end{array} \right] \end{array}$$

Príklad



obr. 47



obr. 48.

Vypočítajme impedančnú maticu tranzistora v zapojení SB (obr. 48), ak poznáme impedančnú maticu tranzistora v zapojení SE (obr. 47)

Riešenie:

obr. 47:

$$\tilde{Z} = \begin{array}{c} \tilde{1}: \\ \tilde{2}: \end{array} \begin{bmatrix} z_{11e} & z_{12e} \\ z_{21e} & z_{22e} \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} \tilde{I}_1 = -I_1 - I_2 \\ \tilde{I}_2 = I_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1: -(1) & 2: -(1),(2) \end{array} \\ \tilde{Z} = \begin{array}{c} 1: -(1) \\ 2: -(1) \\ (2) \end{array} & \left[\begin{array}{c|c} z_{11e} & z_{11e}-z_{12e} \\ \hline z_{11e}-z_{21e} & \begin{array}{c} z_{11e}-z_{12e}+ \\ +z_{21e}+z_{22e} \end{array} \end{array} \right] \end{array}$$

Ak v sústave podľa obr. 42 rozpojíme posledné hlavné vetvy, teda zrejme $I_5=0$ aj $U_5=0$. Sústava bude mať potom len dve nezávislé slučky. Maticovú rovnicu (85) preto upravíme tak, že vektory I a U skrátime o posledný riadok, zatiaľčo $\underline{Z}$ skrátime o posledný riadok i stĺpec. Vo všeobecnosti, skrátime matice I, U a Z o toľko posledných riadkov /riadkov / riadkov a stĺpcov, koľko posledných hlavných vetiev rozpojíme. Ak chceme rozpojiť iné vetvy, než tieto, môžeme najprv transformáciou súradnice sústavy tak, aby rozpojené vetvy mali posledné čísla. Potom môžeme maticu skrátiť vynechaním príslušných riadkov a stĺpcov a rovníc.

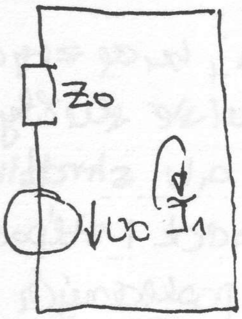
Transformáciu môžeme previesť i v jednej operácii, ktorú nazývame **kombinovanou transformáciou súradníc.** Príslušné slučkové prúdy vyjadríme pomocou ľubovoľne zvolených slučkových prúdov po rozpojení tejto. Dostaneme tak transformačné rovnice. Ďalší postup je rovnaký ako v prípade regulárnej transformácie. Ak napríklad, rozpojíme vetvu C–D obvodu podľa obr. 42. Nové slučkové prúdy označme podľa obr. 46. Transformačné rovnice majú v tomto prípade tvar:

$$I_1 = -I_1'' \qquad I_2 = -I_1'' \qquad I_3 = -I_2''$$

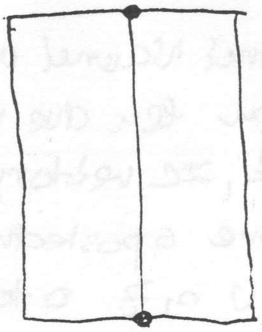
kombinovanú transformáciu matice $\tilde{Z}$ v rovnici (82) aj matice $\underline{Z}$ v rovnici (81) budeme používať i v prípade, ak nová sústava bude mať väčší počet slučiek, než transformovaná sústava, ku ktorej si môžme primyslieť toľko prázdnych slučiek, o koľko ich nová sústava má. Prázdne slučky tvorí len tzv. impedančná matica.

1.1.4. Sériové spojenie dielčích sústav.

Pod pojmom **dielčia sústava**, rozumieme akúkoľvek sústavu vetiev, ktorá má s nezávislých slučiek. Do **série** môžme spojiť len také dielčie sústavy, ktoré majú **rovnaký počet** zhodne orientovaných nezávislých slučiek. Povedzme si, že najjednoduchším obvodom prúdom je dvojpól charakterizovaný impedanciou $\underline{Z}$. Ak pripojíme k dvojpólu ideálny zdroj napätia U_0, dostaneme jednoduchý



Obr. 49

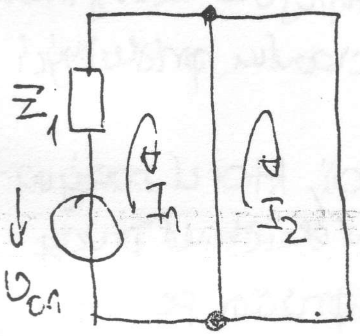


obr. 50

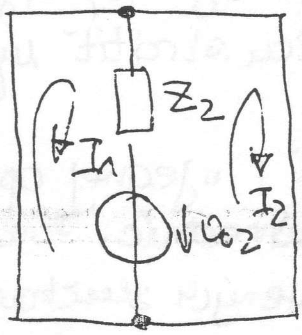
obvod s jednou slučkou (obr. 49), pre ktorý možno napísať tieto maticové rovnice

$$\tilde{U} = \tilde{Z}\tilde{I}$$

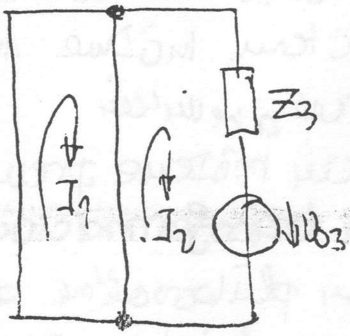
kde však všetky matice, sú tzv. jednoprvkové matice definované takto:



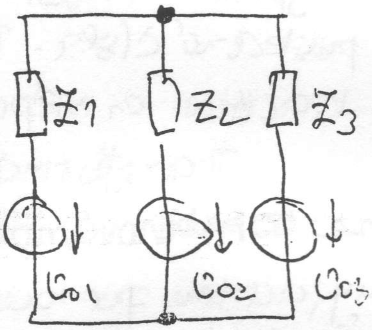
Obr. 51



Obr. 52.



obr. 53.



obr. 54.

$\tilde{U} = U_0$ $\qquad \tilde{Z} = Z$ $\qquad \tilde{I} = \tilde{I}_1$

Na obr. 50 je nakreslená dvojslučková bezimpedančná matica EO. Plné čiary tu reprezentujú skraty. Ak sú dvojpól a zdroj zapojené v ľavej vetve (obr. 51), môžeme vektor napätí $\tilde{U}$ a maticu $\tilde{Z}$ prepočítať do matice Z_1, pri použití transformačného vzťahu

$$\tilde{I}_1 = I_1$$

Elementárny dvojpól môže byť zapojený spolu so zdrojom i U_0 ~~ľavej~~ vetvy Z. (obr. 52), tedy získame charakterizujúcu maticu Z_2, ako transformačný vzťah tu možno použiť vzorec

$$I_1 = I_2 - I_1$$

Podobne platí i pre vetvu 3., (Z_3; $\tilde{I}_1 = I_2$). Sériovým spojením dielčích sústav (obr. 51–53) dostávame sústavu obr. 54, podľa.

Sériovým spojením rozumieme také spojenie dielčích sústav, kedy ~~výsledné~~ slučkové napätie výslednej sústavy sa rovná súčtu slučkových napätí spojovaných dielčích sústav. Vo všeobecnosti, potom pre sériové zapojenie m-dielčích sústav platí:

$$U = U' + U'' + \dots + U^{(m)} = \sum_{k=1}^{m} U^{(k)} \qquad (96)$$

…znamenávame, že rovnica (96) platí tiež obrátene. Ak rozložíme stĺpcovú …maticu slučkových napätí určitej sústavy EO na súčet stĺpcových matíc, …potom každá z dielčích matíc, predstavuje stĺpcovú maticu slučkových na…pätí dielčej sústavy. Ak do (96) dosadíme za $U^{(k)}$ tento vzťah

$$U^{(k)} = Z^{(k)} I \qquad (97)$$

a dostaneme:

$$U = \sum_{k=1}^{m} U^{(k)} = \sum_{k=1}^{m} Z^{(k)} I = \left[\sum_{k=1}^{m} Z^{(k)}\right] I \qquad (98)$$

…o vzťahu (98) potom plynie platnosť tohoto vzťahu:

$$Z = \sum_{k=1}^{m} Z^{(k)} \qquad (99)$$

…kde m je počet dielčích sústav spojených do série. Zo vzťahu (99) vidíme, **impedančná matica Z sústavy**, ktorú dostaneme …ériovým zapojením niekoľkých dielčích sústav, **sa rovná súčtu impedančných matíc dielčích sústav.**

Vzťah (99) efektívnym spôsobom možno aplikovať na zostavenie impedančnej matice sústavy. Postupujeme tu tak, že postupne …ansformujeme impedančné matice jednotlivých prvkov do zvoleného …j sústavy slučkových prúdov a transformované matice sčítame. …hoda / efektívnosť tohoto postupu sa stáva zrejmá, ak analyzo…vaná sústava obsahuje trojpóly a mnohopóly.

1.5. Zovšeobecnenie metódy, na sústavy ktoré obsahujú regulárne mnohopóly.

Regulárnym obvodovým prvkom, z hľadiska metódy slučkových …údov budeme nazývať taký prvok, ktorý má impedančnú mat…. Potom pre každý regulárny n-pól môžeme zvoliť (n-1) nezá…vislých slučiek, ktorými môže byť pripojený k vonkajším obvo…dom a napísať vzťah medzi slučkovými napätiami (zostave…nými do matice $\tilde{U}$) a zvolenými slučkovými prúdmi (zostavenými do matice $\tilde{I}$),

$$\tilde{U} = \tilde{Z} \tilde{I} \qquad (100)$$

2).

de Z je impedančná matica analyzovaného n-pólu. Maticová rovnica

$$U = Z I \qquad (101)$$

ovi popisuje celý analyzovaný EO, dostaneme takto:

- Nezávislé (neriadené) zdroje prúdu, nahradíme ekvivalentnými zdrojmi napätia.

Zistíme /určíme/ stanovíme počet nezávislých slučiek (s). Každý n-pól (n>2), nahradíme uzlom, z ktorého vystupuje n-uzlový. (uzlov).

. Do schémy zakreslíme nezávislé slučkové prúdy, ktoré označíme po radovými číslami.

.. Zostavíme stĺpcovú maticu slučkových napätí $\underline{U}$, tak, že do jej r-tého riadku zapíšeme algebraický súčet napätí zdrojov r-tej slučke. Skratové napätia zdrojov orientovaných v r-tej slučke. Skratové napätia zdrojov orientovaných proti smeru slučkového prúdu /v smere slučkového prúdu/ berieme s kladným /záporným/ napätím. (V niektorých prípadoch, napr. výpočet vstupnej impedancie), nemusíme maticu U zostavovať).

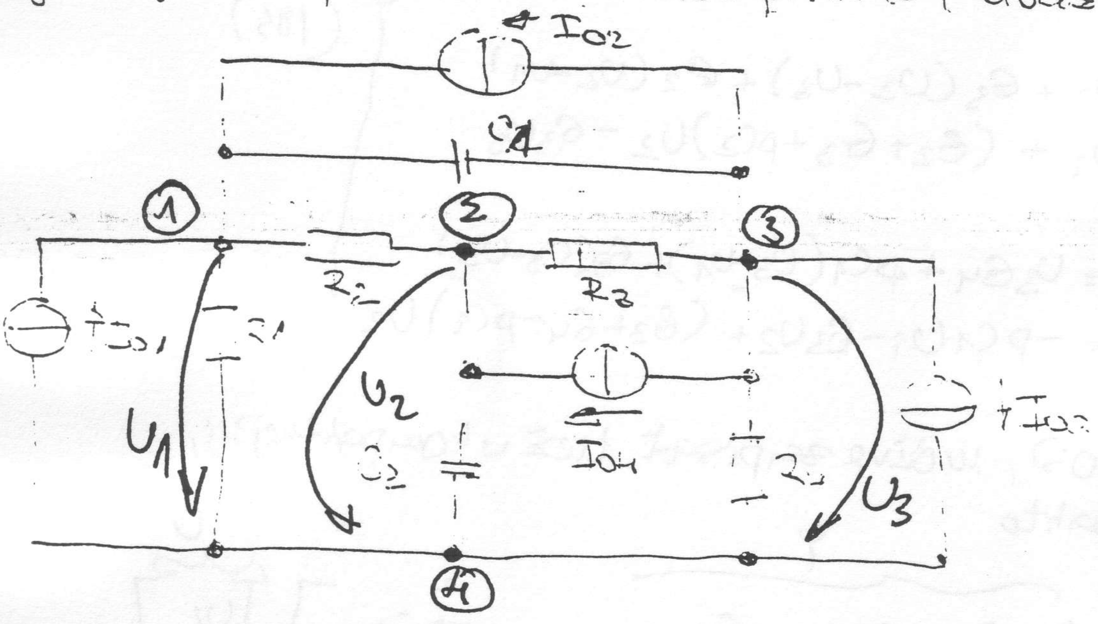
5. Impedančnú maticu Z sústavy zostavíme najjednoduchšie tak, že zostavíme impedančnú maticu ~~zdro~~ sústavy zloženej z dvojpólov podľa algoritmu opísaného v odsekoch (2.1.2., 2.1.4) a potom transformujeme postupne impedančné matice mnohopólov do zvolenej sústavy súradníc a takto transformované matice pripočítame k matici dielčej sústavy. Používame pritom algoritmus opísaný v časti 2.1.4. Ak pre na riešenie zadanej úlohy nepotrebujeme celú impedančnú maticu, môžeme zostaviť len skrátenú impedančnú maticu (t.j. maticu z ktorej sú vynechané niektoré riadky a stĺpce).

Analýzu lineárnych obvodov, budeme teraz ilustrovať na niekoľkých príkladoch.

2.2. Metóda uzlových a vetvových napätí.

2.2.1. Metóda uzlových napätí.

Vieme, že pre sústavu s jednou separátnou časťou, ktorá má n uzlov, môžeme napísať n-1 rovníc podľa I.KZ. Jeden z uzlov (a to ľubovoľný) neuvažujeme, nakoľko prúdy, ktoré doň vstupujú, z neho vystupujú a sú lineárne závislé na prúdoch ostatných uzlov. Tento uzol budeme nazývať **vzťažným uzlom sústavy. (niekedy tiež referenčný).** Býva výhodné za referenčný uzol sústavy zvoliť ten uzol, ku ktorému je pripojený najväčší počet vetiev. Ako príklad uvažujme to podľa obr.



obr. 60.

Pretože pri analýze budeme vychádzať z IKZ, budeme predpokladať, že to je napájané len zo zdrojov (ideálnych) prúdu. Ak to tak nie je, tak zdroje napätia prepočítame na ekvivalentné zdroje prúdu.

Z uvedeného vyplýva, budeme pracovať s [illegible] zdrojmi prúdu a napätí. Označme prúdy, ktoré pritekajú z nezávislých zdrojov symbolmi $I_1, I_2, \ldots, I_{n-1}$ a zostavme ich do stĺpcovej matice I. Môžeme ich nazývať **uzlové prúdy**. Poznamenávame, že sú to veličiny [illegible] zadané. **Zvolíme** si za neznáme (t.j. hľadané) veličiny napätia medzi nezávislými uzlami a vzťažným uzlom (obr. 60) a označme ich symbolmi $U_1, U_2, \ldots U_{n-1}$. Tieto napätia budeme nazývať **uzlovými napätiami.** Rovnako ako v prípade uzlových prúdov zostavujeme z uzlových napätí stĺpcovú maticu uzlových napätí. Sústavu smerníc uzlových napätí zvolenú tak, že smer uzlového napätia je orientovaný vždy od nezávislého uzla k vzťažnému uzlu, nazývame **súhlasne orientovaná sústava.**

Ak poznáme uzlové napätia $U_1, U_2, \ldots, U_n$ [illegible]

Napr. pre napätie medzi uzlom ① a ② uzlom ②, U_{12} platí:
$$U_{12} + U_2 = U_1 \Rightarrow \quad U_{12} = U_1 - U_2 .$$
Vypíšme teraz pre EO podľa obr. 60. 1KZ pre uzly ①, ② a ③, a že tu použijeme zvolené uzlové napätia. Potom dostávame:

$$1) \quad I_{01} + I_{02} = G_1 U_1 + G_2 (U_1 - U_2) + pC_1 (U_1 - U_3)$$
$$I_{01} + I_{02} = (G_1 + G_2 + pC_1) U_1 - G_2 U_2 - pC_1 U_3$$

$$2) \quad I_{04} = pC_2 U_2 + G_3 (U_2 - U_3) + G_2 (U_2 - U_1)$$
$$I_{04} = -G_2 U_1 + (G_2 + G_3 + pC_2) U_2 - G_3 U_3 \qquad (103)$$

$$3) \quad -I_{02} - I_{03} - I_{04} = U_3 G_4 + pC_1 (U_3 - U_1) + G_3 (U_3 - U_2)$$
$$-I_{02} - I_{03} - I_{04} = -pC_1 U_1 - G_3 U_2 + (G_3 + G_4 + pC_1) U_3$$

Sústavu rovníc (103), môžme zapísať tiež v kompaktnejšej, maticovej forme takto:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I_{01} + I_{02} \\ I_{04} \\ -I_{02} - I_{03} - I_{04} \end{bmatrix}}_{I} = \underbrace{\begin{bmatrix} G_1 + G_2 + pC_1 & -G_2 & -pC_1 \\ -G_2 & G_2 + G_3 + pC_2 & -G_3 \\ -pC_1 & -G_3 & G_3 + G_4 + pC_1 \end{bmatrix}}_{Y} \underbrace{\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}}_{U} \qquad (104)$$

resp. takto:
$$I = Y U \qquad (105)$$
kde I je matica uzlových prúdov, U je matica zvolených uzlových napätí a Y je tzv. **Admitančná matica sústavy.** Z predmetu teória obvodov I vieme, že Y-maticu, pre EO zložený z dvojpólov, pri uvažovaní orientovaných uzlových napätí, môžme zostaviť podľa tohoto algoritmu:

a) Do hlavnej diagonály matice Y píšeme súčet všetkých admitancií dvojpólov, pripojených k uzlu s označením riadku (stĺpca) matice Y.

b) Mimo hlavnej diagonály napíšeme so zápornými znamienkom admitancie dvojpólu, ktorý je zapojený medzi uzlom s číslom príslušného

Vektor uzlových prúdov $I = [I_1\ I_2 \dots I_k \dots I_{n-1}]^T$ získame tak, že jeho k-tý prvok I_k je rovný algebraickému súčtu prúdov, ktoré tečú do k-tého uzla zo zdrojov napájania. S kladným znamienkom uvažujeme prúdy, ktoré do uzla tečú a so záporným znamienkom berieme tie prúdy, ktoré z uzla vytekajú. Aplikujúc vyššie spomenuté/uvedené pravidlá na obvod podľa obr. 60, dostaneme sústavu rovníc (104) (resp. (105)).

Zo známej maticovej rovnice (105) môžme vypočítať hľadané veličiny (uzlové napätia) použitím vzťahu

$$U = Y^{-1} I \qquad (106)$$

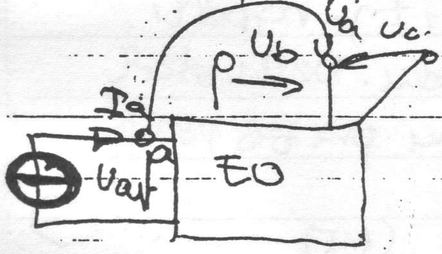
nakoľko platí:

$$\det Y \neq 0 \qquad (107)$$

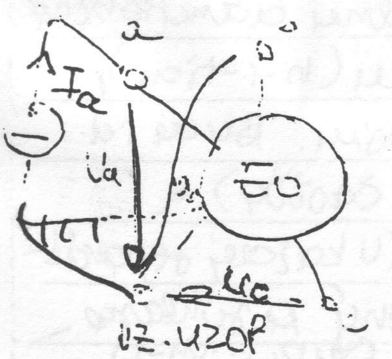
Ak nás zaujíma výpočet len jednej veličiny, napr. napätia U_k, tak ho môžme stanoviť použitím Cramerovho pravidla takto:

$$U_k = \frac{1}{\Delta}\left(\Delta_{1:k} I_1 + \Delta_{2:k} I_2 + \dots + \Delta_{n-1:k} I_{n-1}\right) \qquad (108)$$

kde Δ je determinant admitančnej matice, zatiaľčo $\Delta_{a:b}$ označuje algebraický doplnok jeho prvku, ktorý leží v a-tom riadku a b-tom stĺpci, ktorý sa rovná $(-1)^\alpha$ násobku determinantu matice, ktorú z matice Y obdržíme vynechaním jej a-tého riadku a b-tého stĺpca. Symbol α je udaný počet kladných čísel medzi indexami algebraického doplnku.



Obr. 61.



Ak je sieť napájaná len z jediného zdroja prúdu (obr. 61), sú napätia U_a, U_b, resp. U_c dané vzťahmi

$$U_b = \frac{\Delta_{a:b}}{\Delta} I_a \qquad (109)$$

$$U_c = \frac{\Delta_{a:c}}{\Delta} I_a \qquad (110)$$

$$U_a = \frac{\Delta_{a:a}}{\Delta} I_a \qquad (111)$$

Použitím rovnice (111) možno vypočítať vstupnú impedanciu sústavy takto:

$$Z_{vst} = \frac{U_a}{I_a} = \frac{\Delta_{a:a}}{\Delta} \qquad (112)$$

pričom poznamenávame, že ide o Z_{vst} zodpovedajúcu práve vymedzenej uzlom a a referenčným uzlom.

Niekedy nás zaujíma prenos ~~prie~~ napätia, definovaný ako pomer $K_U = U_c/U_b$ resp. $K_U' = U_c/U_a$. Použitím vzťahov (109) a (110) možno tieto prenosy vypočítať takto:

$$K_U = \frac{U_c}{U_b} = \frac{\frac{\Delta_{a:c}}{\Delta} I_a}{\frac{\Delta_{a:b}}{\Delta} I_a} = \frac{\Delta_{a:c}}{\Delta_{a:b}} \qquad (113)$$

resp.

$$K_U' = \frac{U_c}{U_a} = \frac{\Delta_{a:c}}{\Delta_{a:a}} \qquad (114)$$

Nezávislé budú tieto napätie vtedy, ak nebudú tvoriť ~~sluč~~ slučku.

2.2. Transformácia súradníc.

Uvažujme, ktorá má len jednu vodivo spojenú časť a má n-uzlov, ak stanovili (n-1) nezávislých uzlových napätí, t.j. napätí nezávislých uzlov, vzhľadom k referenčnému uzlu. Nech vzťah medzi uzlovými prúdmi a uzlovými napätiami pre EO podľa obr. 60, je vyjadrený maticovou rovnicou

$$\tilde{I} = \tilde{Y}\tilde{U} \qquad (115)$$

kde vlnovka označuje pôvodné veličiny a pôvodnú admitančnú maticu. Uvažujme však môžeme nájsť i iné trojicu (n-1-ticu), ~~Uzlových~~ nezávislých napätí, orientovaných rôznym spôsobom. Bude ich počet $p = n-1$ (pre sústavu s jednou separátnou časťou) a $= n-d$ pre sústavy s d-separátnymi časťami. (V každej separátnej časti je potrebné zvoliť jeden uzol za vzťažný v jednotlivo orientovanej sústavy). Všeobecne zvolených (U₁,...,Uₙ₋₁) napätia budeme nazývať **bránové napätia** (resp. **napätia uzlových párov**). Každé napätie uzlového páru považujeme za bránu sústavy,

bránový ~~mila~~ (**dvojica uzlového páru**).

ria uzlového párov do brány vstupuje na strane vyššieho potenciálu a brány vystupuje na strane nižšieho potenciálu. V prípade lineárnych a linearizovaných sústav, môžeme medzi prúdmi uzlových párov $(I_1, I_2 \dots I_{n-1})$ a napätiami uzlových párov $(U_1, U_2 \dots U_{n-1})$ opísať $(n-1)$ nezávislých rovníc, v maticovom tvare:

$$I = Y U \qquad (116)$$

de I a Y sú stĺpcové matice prúdov a napätí uzlových párov a ... je regulárna admitančná matica sústavy.

A teraz vyjadríme pôvodné napätie $\tilde{U}$ pomocou napätia U a nové prúdy uzlových párov pomocou prúdov pôvodných takto:

$$\tilde{U} = C U \qquad (117)$$

$$I = D \tilde{I} \qquad (118)$$

de C je **transformačná matica napätí** a D je **transformačná matica prúdov**, tak po dosadení (115) do (118) dostaneme:

$$I = D \tilde{I} = D \tilde{Y} \tilde{U} \qquad (119)$$

A teraz do (119) dosadíme vzťah (117) tak dostaneme:

$$I = D \tilde{Y} C U \qquad (120)$$

Porovnaním vzťahov (120) a (116), zistíme, že platí:

$$Y = D \tilde{Y} C \qquad (121)$$

Ide o regulárnu sústavu, v ktorej celkový okamžitý výkon oboch sústav je rovnaký, tak rovnakým postupom ako v prípade ... slučkových prúdov, možno dokázať, že platí:

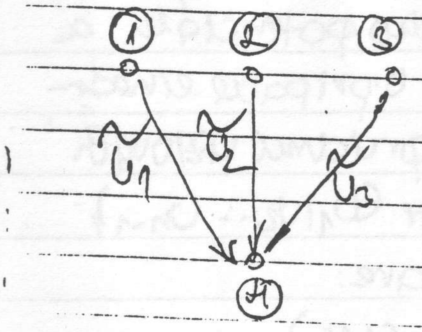
$$C = D^T \quad a \quad D = C^T \qquad (122)$$

Takže

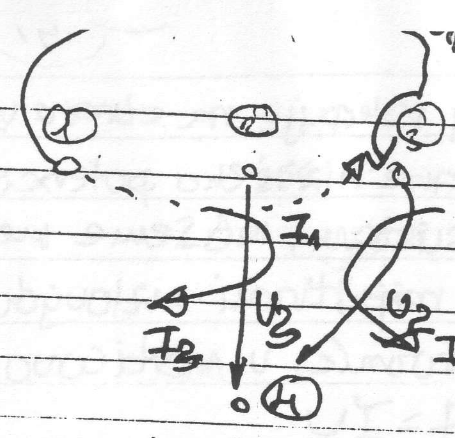
$$Y = C^T \tilde{Y} C = D \tilde{Y} D^T \qquad (123)$$

Ak teda poznáme transformačné rovnice (117) možno pomocou známeho algoritmu násobenia 3 matíc vypočítať prúdy uzlových párov (použitím (118)) ako aj admitančné matice pre uzlové páry.

Ako príklad uvažujme sústavu so 4 uzlami podľa obr. 32. ...cená admitančná matica $\tilde{Y}$, ktorá má tvar:



Obr. 62.



Obr. 63.

$$\tilde Y = \begin{array}{c|ccc} & \tilde 1 & \tilde 2 & \tilde 3 \\ \hline \tilde 1: & \tilde y_{11} & \tilde y_{12} & \tilde y_{13} \\ \tilde 2: & \tilde y_{21} & \tilde y_{22} & \tilde y_{23} \\ \tilde 3: & \tilde y_{31} & \tilde y_{32} & \tilde y_{33} \end{array}$$

Teraz indukujeme I a Y pre nový systém súradníc, uvedený na obr. 63. Najprv napíšeme transformačné rovnice (operácia (117)), t.j. tak, že pôvodné napätia vyjadríme pomocou napätí nových.

$$\tilde U_1 = U_1 + U_2 \qquad \tilde U_2 = U_3 \qquad \tilde U_3 = U_2$$

$$\Rightarrow \tilde I = \begin{array}{c} \tilde 1: \\ \tilde 2: \\ \tilde 3: \end{array} \begin{bmatrix} \tilde I_1 \\ \tilde I_2 \\ \tilde I_3 \end{bmatrix} \Rightarrow I = \begin{array}{c} 1: (\tilde 1) \\ 2: (\tilde 1)(\tilde 3) \\ 3: (\tilde 2) \end{array} \begin{bmatrix} \tilde I_1 \\ \tilde I_1 + \tilde I_3 \\ \tilde I_2 \end{bmatrix}$$

Použitím známeho algoritmu prevedieme teraz transformačnú maticu Y do nového systému súradníc:

$$Y = \begin{array}{c|ccc} & 1: (\tilde 1) & 2: (\tilde 1)(\tilde 3) & 3: (\tilde 2) \\ \hline 1: (\tilde 1) & \tilde y_{11} & \tilde y_{11} + \tilde y_{13} & \tilde y_{12} \\ 2: (\tilde 1)(\tilde 3) & \tilde y_{11} + \tilde y_{31} & \tilde y_{11} + \tilde y_{13} + \tilde y_{31} + \tilde y_{33} & \tilde y_{12} + \tilde y_{32} \\ 3: (\tilde 2) & \tilde y_{21} & \tilde y_{21} + \tilde y_{23} & \tilde y_{22} \end{array}$$

Ak uzemníme uzol posledného uzlového napätia so vzťažným uzlom v sústave pôvodnej, alebo ak spojíme nakrátko svorky posledného uzlového páru, bude zrejme platiť:

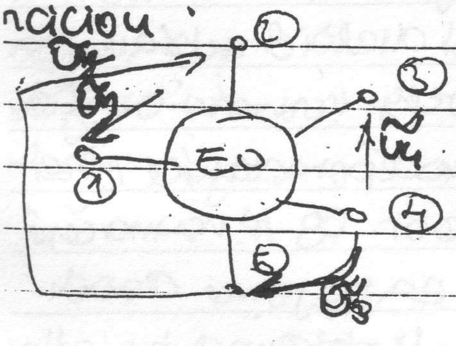
$$\tilde I_3 = \tilde Y_{3:3} \tilde U_3 .$$

$$I_3 = Y_{3:3} U_3 .$$

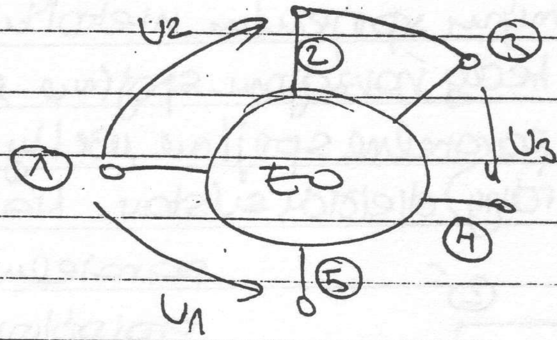
t.j. vo všetkých maticiach vynecháme posledný riadok a v štvorcovej matici navyše posledný stĺpec. ($U_3 = 0$, $I_3 = 0$, $\tilde U_3 = 0$, $\tilde I_3 = 0$) To operáciu nazývame **redukciou súradníc** (t.j. operáciu spojenia uzla-nezávislého so vzťažným uzlom, alebo spojenia svoriek uzlového páru nakrátko).

Niekedy je potrebné spojiť niektoré uzly nakrátko a zároveň robiť transformáciu súradníc. Môžeme to urobiť tak, že trans-

…ormujeme súradnice tak, aby dvojice (pólov), ktoré máme spojiť nakrátko, tvorila bránu označenú posledným číslom. Pri regulárnej transformácii vynecháme v maticiach posledný riadok a v admitančnej matici i posledný stĺpec. Obe operácie však môžeme spojiť v jedinú operáciu, ktorú nazývame **kombinovanou transformáciou**.



Obr. 64



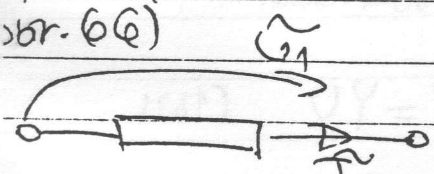
Obr. 65

Ako príklad, tak uvažujme sústavu podľa Obr. 64 a 65. Uzly podľa obr. 64 majú byť spojené nakrátko uzly ② a ③. Pri riešení úlohy postupujeme tak, že pôvodné napätia uzlových párov vyjadríme pomocou nových napätí, t.j. napíšme $\tilde{U} = CU$:

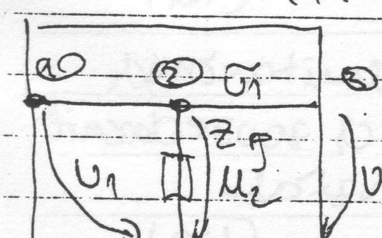
$$\tilde{U}_1 = -U_2 \qquad \tilde{U}_3 = U_1 - U_2 - U_3$$
$$\tilde{U}_2 = U_2 - U_1 \qquad \tilde{U}_4 = -\tilde{U}_3$$

Takto získané transformačné rovnice použijeme potom priamo na transformáciu matíc I a Y.

Kombinovanú transformáciu súradníc môžeme použiť i v tom prípade, ak chceme transformovať admitanciu Y_k dvojpólu (obr. 66), do ľubovoľne zvolenej sústavy súradníc. Napätie na dvojpóle možno považovať za napätie brány 1, t.j. $\tilde{U}_1$ a ostatné nezávislé napätia možno zvoliť ľubovoľne. Admitančná matica tejto sústavy (ktorá má jediný nenulový prvok), prevedieme podľa známeho algoritmu do novej sústavy súradníc (obr. 67). Vyzerá to rovnako, a teda pôvodnú maticu Y považujeme za [illegible]



Obr. 66

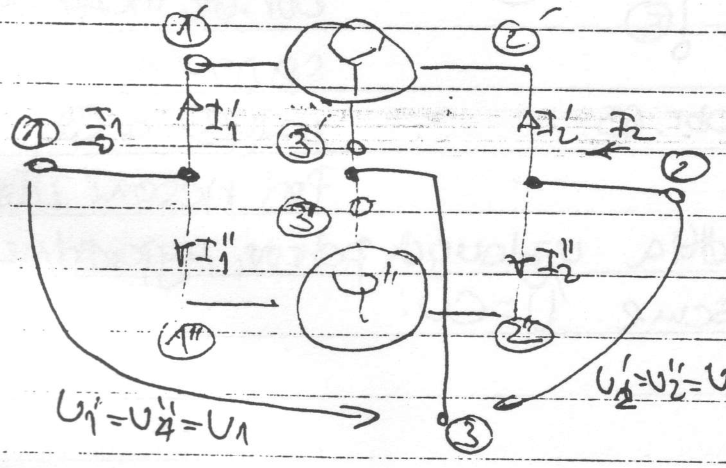


$\tilde{U}_1 = U_2$

Obr. 67

1.1.3. Paralelné spojenie dielčích sústav.

Paralelne môžeme spájať len také dielčie sústavy, ktoré majú rovnaký počet uzlov. V u všetkých dielčích sústavách označíme rovnakým spôsobom uzly i súradnice (nezávislé napätia a im zodpovedajúce prúdy), pričom jednotlivé sústavy odlišujeme napr. len čiarkami. Paralelným spojením niekoľkých dielčích sústav rozumieme také spojenie, kedy navzájom spojíme všetky rovnako označené uzly (obr. 68) alebo paralelne spojíme všetky zodpovedajúce nezávislé uzlové páry (brány) dielčích sústav. Na obr. 68 je naznačené



obr. 68

paralelné zapojenie dvoch trojpólov. Výsledný trojpól ako aj trojpóly, ktoré vznikol ich paralelným zapojením ide o súhlasne orientované sústavy. Pre dielčie sústavy platí:

$$I' = Y'U' \quad I'' = Y''U'' \qquad (124)$$

zatiaľ čo pre výsledný sústavu máme

$$I = YU \qquad (125)$$

Z obr. 68 vidíme, že pre napätia U', U'' a U platí:

$$U' = U'' = U \qquad (126)$$

Potom použitím 1KZ a vzťahov (124) – (126) dostávame:

$$I = I' + I'' = Y'U' + Y''U'' = Y'U + Y''U = (Y' + Y'')U = YU \qquad (127)$$

kde

$$Y = Y' + Y'' \qquad (128)$$

Výsledná matica Y teda dostaneme ako súčet admitančných matíc dielčích sústav. Vzťah (128) možno jednoducho zovšeobecniť na spojenie n-dielčích sústav, čím obdržíme vzťah

$$Y = \sum_{k=1}^{n} Y(k) \qquad (129)$$

Toto platí i pre paralelné zapojenie niekoľkých dielčích sústav pri všeobecnej voľbe niektorých uzlových párov, natoľko stor uvedené úvahy platia i v tomto prípade.

Vzťah (129) je veľmi dôležitý, pretože na jeho základe a za pomoci transformácie sústavy zostavíme admitančnú maticu ľubovoľnej regulárnej sústavy.

2.2.4. Metóda bránových napätí.

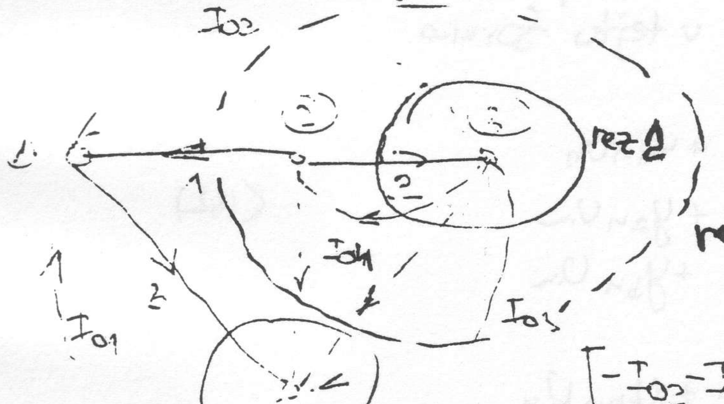
O metóde bránových napätí hovoríme vtedy, ak zvolíme nezávislé rezy a zvolíme tak, že netvoria súhlasne orientovanú slučku. Sem patrí tiež prípad, keď analyzovaná sústava má niekoľko oddelených častí. Správanie sa sústavy popíšeme základnou maticovou rovnicou

$$I = YU \qquad (130)$$

kde U je stĺpcová matica hľadaných veličín, ktorými sú zvolené napätia uzlových párov, I je stĺpcová matica zadaných veličín tzv. bránových prúdov a Y je štvorcová admitančná matica sústavy.

Regulárnu maticu Y dostaneme ako súčin matíc, ktoré získame kombinovanou transformáciou matíc jednotlivých n-pólov. Stĺpcovú maticu bránových prúdov získame transformáciou uzlových prúdov ... použitím tzv. nezávislých rezov.

Použitie metódy nezávislých rezov je ilustrované na obr. 68.



Obr. 69.

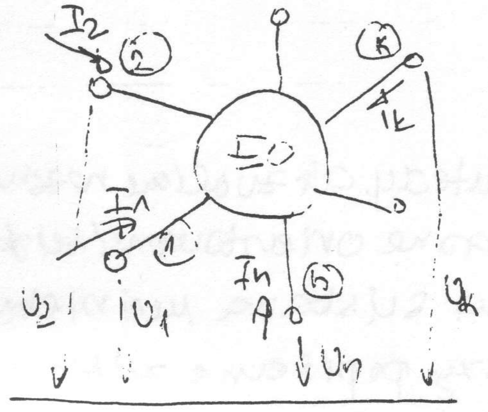
$$\begin{bmatrix} -I_{02}-I_{03} \\ I_{02}+I_{03}+I_{04} \\ I_{01}-I_{04} \end{bmatrix}$$

Topologické útvary zobrazujúce nezávislé rezy sú vedené tak, aby pretínali len jednu vetvu, resp. zvolenú napäťovú bránu. Podľa (127) je algebraický súčet prúdov, ktoré pretínajú kružnicu rezu rovný nule. Preto každý bránový prúd je rovný algebraickému súčtu prúdov napájacích zdrojov, ktoré pretínajú kružnicu rezu. Za kladné berieme prúdy, ktoré majú vzhľadom k rezu rovnaký smer ako príslušná vetva stromu. Preto pre rezy podľa obr. 68 dostávame:

rez 1: $-I_{02}-I_{03}$, rez 2: $I_{02}+I_{03}+I_{04}$, rez 3: $I_{04}-I_{01}$

2.2.5. Zovšeobecnená metóda uzlových napätí.

Uvažujme sústavu EO podľa obr. 70, ktorá má n-uzlov. Špecifikujme teraz pojem uzlového napätia sústavy pre prípad, keď referenčným bodom nie je žiadny zo uzlov sústavy. Takto definovaných uzlov napätí je teraz n, pričom ich indexy zodpovedajú označeniu uzlov. Uzlovým prúdom budeme rozumieť prúd, ktorý tečie zo zdrojov do príslušného uzla sústavy. Rovnako uzlové prúdy ($I_1, I_2, \dots, I_n$) majú indexy, ktoré súhlasia s označením uzlov.



vzťažný uzol

obr. 70

V lineárnej sústave platí medzi uzlovými prúdmi (zostavenými do stĺpcovej matice $\overset{*}{I}$) a medzi uzlovými napätiami (zostavenými do stĺpcovej matice $\overset{*}{U}$), lineárny vzťah,

$$\overset{*}{I} = \overset{*}{Y}\,\overset{*}{U} \qquad (131)$$

kde symbol $\overset{*}{Y}$ označuje štvorcovú maticu, ktorú nazývame **úplnou admitančnou maticou** (**indefinite, equifactor, floating matrix**). Rovnicu (131) môžeme zapísať tiež v tejto forme:

$$\begin{aligned}
I_1 &= y_{11}U_1 + y_{12}U_2 + \dots + y_{1n}U_n \\
I_2 &= y_{21}U_1 + y_{22}U_2 + \dots + y_{2n}U_n \\
I_3 &= y_{31}U_1 + y_{32}U_2 + \dots + y_{3n}U_n \\
&\vdots \\
I_n &= y_{n1}U_1 + y_{n2}U_2 + \dots + y_{nn}U_n
\end{aligned} \qquad (132)$$

2.2.5.1. Niektoré vlastnosti úplnej admitančnej matice.

1. Úplná admitančná matica je singulárna matica, ~~preto~~ t.j. jej determinant

$$\overset{*}{\Delta} = 0 \qquad (133)$$

2. Súčet všetkých prvkov v každom riadku (stĺpci) je rovný nule, čo možno zapísať takto.

51

$$\sum_{s=1}^{n} y_{rs} = 0 \quad (r=1,2,\dots n) \qquad (134)$$

$$\sum_{r=1}^{n} y_{rs} = 0 \quad (s=1,2,\dots n) \qquad (135)$$

kde symbol y_{rs} reprezentuje prvok matice $\overset{*}{Y}$, ktorý leží v r-tom riadku a s-tom stĺpci (prvok y_{rs} matice $\overset{*}{Y}$). Tvrdenie (135) dokážeme tak, že sčítame všetky rovnice (132), čím dostaneme

$$\sum_{r=1}^{n} I_r = \sum_{r=1}^{n} y_{r1} U_1 + \sum_{r=1}^{n} y_{r2} U_2 + \dots + \sum_{r=1}^{n} y_{rn} U_n =$$

$$= \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} y_{rs} U_s = \sum_{s=1}^{n}\left[\sum_{r=1}^{n} y_{rs}\right] U_s \qquad (136).$$

nakoľko podľa IKZ platí:

$$\sum_{r=1}^{n} I_r = 0 \qquad (137)$$

tak pre nenulové napätia U_s $(s=1,2,\dots n)$, je (137) splnené, ak ~~musí platiť~~

$$\sum_{r=1}^{n} y_{rs} = 0 \quad \text{pre } s=1,2,\dots n, \qquad (138)$$

čím sme dokázali tvrdenie (135).

Z obr. 40 je zrejmé, že zdroje z uzlových prúdov nezmenia, ak všetky uzlové napätia zväčšíme o $\Delta U \neq 0$. Preto zrejme platí:

$$I_r = y_{r1}U_1 + y_{r2}U_2 + \dots + y_{rn}U_n \qquad (139)$$

$$I_r = y_{r1}(U_1+\Delta U) + y_{r2}(U_2+\Delta U) + \dots + y_{rn}(U_n+\Delta) \qquad (140)$$

odčítaním (139) od (140) dostávame

$$0 = \left[\sum_{s=1}^{n} y_{rs}\right]\Delta U \qquad (141)$$

odkiaľ plynie platnosť (134) nakoľko $\Delta U \neq 0$. Z platnosti (134) a (135) je zrejmé, že každý zo stĺpcov (riadkov) $\overset{*}{Y}$ je jednoznačnou lineárnou kombináciou (súčtom) ostatných riadkov (stĺpcov), z toho plynie, že

$$\det \overset{*}{Y} = 0 \qquad (142)$$

Ďalšou dôležitou vlastnosťou úplnej admitančnej matice $\overset{*}{Y}$ je to, že jej všetky algebraické doplnky majú rovnakú hodnotu, t.j. platí

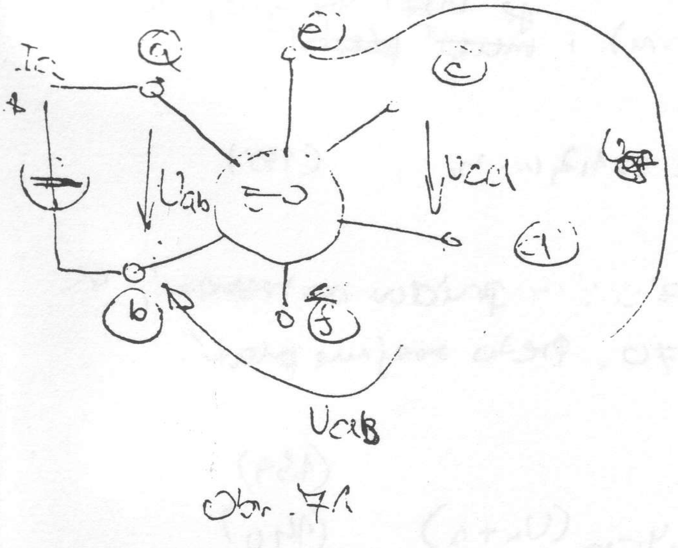
$$C = \overset{*}{\Delta}_{ij} \quad (i,j = 1,2,\dots n) \qquad (143)$$

čo znamená, že determinant matice, ktorú dostaneme z $\overset{*}{Y}$ po vynechaní jej ľubovoľného riadku a stĺpca, násobený hodnotou $(-1)^{d}$, kde d je počet nepárnych riadkov a stĺpcov, ktoré vynecháme, má vždy rovnakú hodnotu. Dôkaz tvrdenia (143) vyplýva z predpokladu, že v sústave závislých rovníc (132) môžeme vynechať i-tú rovnicu a súčasne môžeme j-tý uzol zvoliť za vzťažný ($U_j = 0$). Pretože sa determinant získaný nemôže meniť, musí platiť (143).

2.2.5.2. Základné výpočtové rovnice.

Ak máme zo (131) vypočítať $\overset{*}{U}$, nemôžeme násobiť celú rovnicu zľava inverznou maticou, pretože úplná admitančná matica $\overset{*}{Y}$ je singulárna. Preto vzťažný potenciál uložíme do jedného z uzlov. Nech je to napr. uzol a (obr. 71). Potom pre uzlové napätia U_a platí:

$$U_a = 0 \qquad (144)$$



Obr. 71

Pretože máme n-lineárne závislých rovníc, môžeme ktorúkoľvek z nich vypočítať. Rozhodneme sa pre b-tu z nich. Znamená to, že v matici $\overset{*}{I}$ vynecháme b-tý ~~stĺpec~~ riadok, čím dostaneme maticu $\overset{*}{I}_b$. V matici $\overset{*}{Y}$ sa to prejaví vynechaním b-teho riadku, čím dostaneme maticu $\overset{*}{Y}_b$. Pretože $U_a = 0$, vynecháme v $\overset{*}{U}$ a-tý riadok ($\overset{*}{U}_a$) a v matici $\overset{*}{Y}$ ~~-ey~~ a-tý stĺpec. Potom dostaneme

$$\overset{*}{I}_b = \overset{*}{Y}_{b:a}\, \overset{*}{U}_{a:} \qquad (145)$$

Je to rovnica, kde skrátená admitančná matica $\overset{*}{Y}_{b:a}$ je regulárna, preto môžeme písať:

$$\overset{*}{U}_{a:} = \overset{*}{Y}_{b:a}^{-1}\, \overset{*}{I}_b \qquad (146)$$

Ak je sústava napájaná len zdrojom prúdu I_a, môžeme pre výpočet napätia U_{cd}, použiť na báze aplikácie Cramerovho pravidla tento vzorec:

$$U_{cd} = \frac{1}{C}\Delta_{ba:dc} I_a = \frac{1}{C}\overset{*}{\Delta}_{ab:cd} I_a \qquad (147)$$

pričom

kde $\overset{*}{Y}_{b:d} = C$ a $\overset{*}{\Delta}_{ba:dc} = \overset{*}{\Delta}_{ab:cd}$ — stĺpcová brána; počítané napätie

pričom výraz $\overset{*}{\Delta}_{ab:cd}$ označuje dvojnásobný algebraický doplnok. Dvojnásobný algebraický doplnok $\overset{*}{\Delta}_{ab:cd}$ sa rovná $(-1)^{\alpha+\beta}$ násobku determinantu matice, ktorú dostaneme vynechaním riadkov a, b a stĺpcov c, d matice $\overset{*}{Y}$. α je tu počet nepárnych čísel udávajúcich vynechávané riadky a stĺpce, zatiaľ čo ~~algebraického~~ stupňa, β je počet vzájomných výmen v stĺpcoch cd, ktoré treba urobiť a v stĺpcoch cd dvojbodky naprázdno, potrebných na to, aby čísla menšie v oblasti stĺpcových priradení predchádzali nasledujúcim po väčšie. Túto definíciu platí tiež pre viacnásobné algebraické doplnky.

Napr. pre $\overset{*}{\Delta}_{52:78}$ je $(-1)^{2+1} = (-1)$, ($\alpha=2$, $\beta=1$; $5\rightleftarrows 2$), alebo pre $\overset{*}{\Delta}_{31:84\,01}$ je $(-1)^{3+3} = 1$ (α: 3, 1, 1; β: $8\rightleftarrows 1$; $4\rightleftarrows 8$; $1\rightleftarrows 4$);

Napätie U_{cd} možno vypočítať tiež ako rozdiel napätí U_{cb} a U_{db} takto:

$$U_{cd} = U_{cb} - U_{db} = \frac{1}{C}\left[\overset{*}{\Delta}_{ab:cb} - \overset{*}{\Delta}_{ab:db}\right] I_a \qquad (148)$$

Z rovníc (147) a (148), zisťujeme že platí:

$$\overset{*}{\Delta}_{ab:cd} = \overset{*}{\Delta}_{ab:cb} - \overset{*}{\Delta}_{ab:db} \qquad (149)$$

Obdobne platí tiež

$$\overset{*}{\Delta}_{ab:cd} = \overset{*}{\Delta}_{ak:cd} - \overset{*}{\Delta}_{bk:cd} \qquad (150)$$

Vzťah (147) platí tiež pre napätie medzi uzlami a a b., t.j. pre U_{ab} dostaneme

$$U_{ab} = \frac{1}{C}\overset{*}{\Delta}_{ab:ab} I_a \qquad (151)$$

Užitím (151) môžeme vypočítať vstupnú impedanciu sústavy z uzlov (svoriek) a a b, takto:

$$\hat{Z}_{vst} = \frac{U_{ab}}{I_a} = \frac{\overset{*}{\Delta}_{ab:ab}}{C} = \qquad (152)$$

-

(154)

renapätie U_{ef} dostávame použitím (147) tento vzťah:

$$U_{ef}=\frac{\overset{*}{\Delta}_{ab:ef}}{c}I_a \qquad (153)$$

delením rovníc (153) a (151), a (153) a (147) dostávame potom tieto prenosy napätí:

$$\frac{U_{ef}}{U_{cd}}=\frac{\frac{\overset{*}{\Delta}_{ab:ef}}{c}I_a}{\frac{\overset{*}{\Delta}_{ab:cd}}{c}I_a}=\frac{\overset{*}{\Delta}_{ab:ef}}{\overset{*}{\Delta}_{ab:cd}}, \quad K_U'=\frac{U_{ef}}{U_{cd}}=\frac{\overset{*}{\Delta}_{ab:ef}}{\overset{*}{\Delta}_{ab:cd}} \qquad (154)$$

$$\frac{U_{ef}}{U_{ab}}=\frac{\frac{\overset{*}{\Delta}_{ab:ef}}{c}I_a}{\frac{\overset{*}{\Delta}_{ab:ab}}{c}I_a}=\frac{\overset{*}{\Delta}_{ab:ef}}{\overset{*}{\Delta}_{ab:ab}}, \quad K_U''=\frac{U_{ef}}{U_{ab}}=\frac{\overset{*}{\Delta}_{ab:ef}}{\overset{*}{\Delta}_{ab:ab}} \qquad (155)$$

1.2.5.3. Zostavovanie východzích rovníc.

V prípade metódy uzlových napätí budeme pracovať so sústavou rovníc a je to sústava daná vzťahom

$$\overset{*}{I}=\overset{*}{Y}\overset{*}{U} \qquad (156)$$

sústava

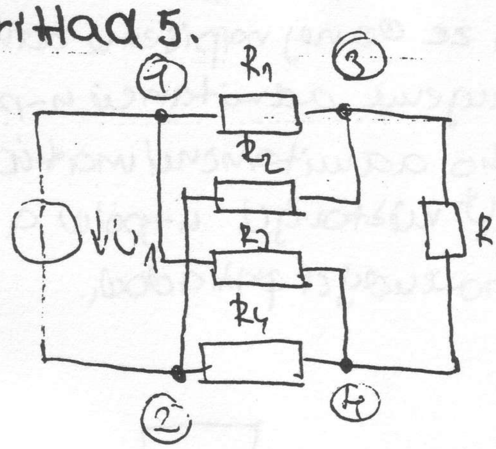
$$I=YV \qquad (157)$$

Maticovú rovnicu (157) vieme už zostaviť tak pre metódu uzlových napätí ako i pre metódu napätí uzlových párov. Maticovú rovnicu (156) dostaneme z (157) tak, že I doplníme o prvok I_n ($\overset{*}{I}=[I^T \; I_n]^T$), kde I_n sa rovná záporne vzatému súčtu uzlových prúdov $I_1, I_2, \ldots, I_p$. Maticu $\overset{*}{U}$ zostavíme podľa vzťahu

$$\overset{*}{U}=[U^T \; U_n]^T \qquad (158)$$

zostrojíme tak, že Y doplníme o ďalší riadok a stĺpec. Prvky v poslednom riadku a v poslednom stĺpci sa rovnajú záporne vzatému súčtu prvkov v príslušnom riadku (stĺpci) regulárnej matice Y. Inak môžeme úplnú, alebo svorkovú admitančnú maticu zostaviť podľa algoritmu, ktorý platí pre regulárne admitančné matice v prípade metódy uzlových napätí.

Príklad 5.



Obr. 42.

Pre obvod uvedený na Obr. 42, vypočítajte vstupný odpor. Pre hodnoty parametrov obvodových prvkov platí:

$R_1 = 1\,k\Omega$ $R_3 = 4\,k\Omega$ $R_5 = 10\,k\Omega$

$R_2 = 2\,k\Omega$ $R_4 = 5\,k\Omega$

Riešenie:

Podľa (152) pre R_{vst} platí:

$$R_{VST} = \frac{\overset{*}{\Delta}_{12:12}}{C} = \frac{\overset{*}{\Delta}_{12:\Delta 12}}{\overset{*}{\Delta}_{2:2}}$$

Nakoľko v oboch prípadoch, (v oboch algebraických doplnkoch), vynechávame 2. riadok a 2. stĺpec, postačuje zostaviť redukovanú admitančnú maticu $\overset{*}{Y}_{2:2}$:

$$\overset{*}{Y}_{2:2} = \begin{array}{c} \\ 1: \\ 3: \\ 4: \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1: & 3: & 4: \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c} G_1 + G_3 & -G_1 & -G_3 \\ -G_1 & G_1 + G_3 + G_5 & -G_5 \\ -G_3 & -G_5 & G_3 + G_4 + G_5 \end{array} \right] \end{array}$$

1.2.5.4. Transformácia súradníc.

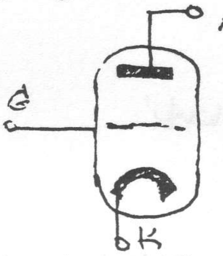
Transformáciu súradníc realizujeme spôsobom, s ktorým sme sa už zoznámili, t.j. vyjadríme pôvodné uzlové napätia pomocou nových napätí a pomocou transformačných rovníc, už starú admitančnú maticu jednoducho prepočítame.

1.2.5.5. Analýza obvodov s regulárnymi n-pólmi.

Regulárnosť je tu chápaná z ohľadom na použitie metódy, t.j. vyhľadáme si v prípade metódy uzlových napätí (uzlových napätí uzlových prvkov) tie prvky, ktorých admitančná matica existuje. Sú to najmä tranzistory, trióda, pentóda, zdroje prúdu riadené napätím, transformátor (reálny) a gyrátor. Je vyhodnotí obvyklé z maticovej rovnice (15?), t.j. pracujeme s $\overset{*}{Y}$.

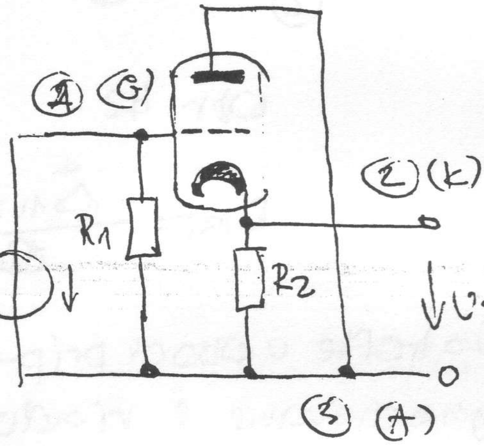
Pri zostavovaní matice $\overset{*}{Y}$ postupujeme tak, že do nej vpíšeme admitancie dvojpólov. Potom do nej transformujeme admitancie n-pólov. Je výhodné, ak u každého n-pólu poznáme jeho admitančnú maticu. V ďalšom ~~uved~~ uvedieme stručný prehľad $\overset{*}{Y}$ niektorých n-pólov a budeme ilustrovať ich aplikáciu v jednoduchých príkladoch.

a. Trioda. (obr.73)



Obr. 73

$$\overset{*}{Y} = \begin{array}{c} \\ (G) \\ (A) \\ (K) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (G) & (A) & (K) \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ S & G_i & -S-G_i \\ -S & -G_i & S+G_i \end{array}\right] \end{array}$$



obr.74.

Príklad 6.

Pre katódový sledovač podľa obr.74, vypočítajte prenos napätí $K=U_2/U_1$.

Riešenie.

Podľa (55) platí pre prenos napätí tento vzťah

$$K = U_2/U_1 = U_{13}/U_{23} = \frac{\overset{*}{\Delta}_{13:23}}{\overset{*}{\Delta}_{13:13}}$$

z ktorého vidíme, že pre výpočet K potrebujeme poznať skrátenú admitančnú maticu $\overset{*}{Y}_{13:3}$.

$$\overset{*}{Y}_{13:3} = \begin{array}{c} \\ (2)(K) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} (1)(G) & (2)(K) \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} -S & G_A+G_2+S+G_i \end{array}\right] \end{array}$$

~~Dosadením pre výpočet~~ do vzorca pre výpočet K dostávame.

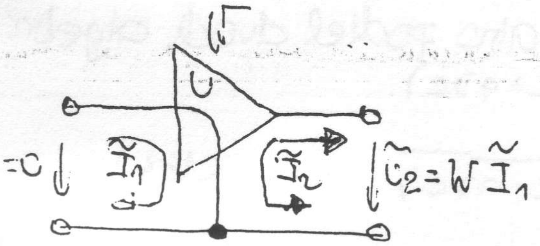
$$K = \frac{\overset{*}{\Delta}_{13:23}}{\overset{*}{\Delta}_{13:13}} = \frac{-S\,(-1)^3}{(G_2+S+G_i)(-1)^4} = \frac{S}{S+G_i+G_2}$$

3. Analýza obvodov s neregulárnymi prvkami.

3.1. Metóda slučkových prúdov.

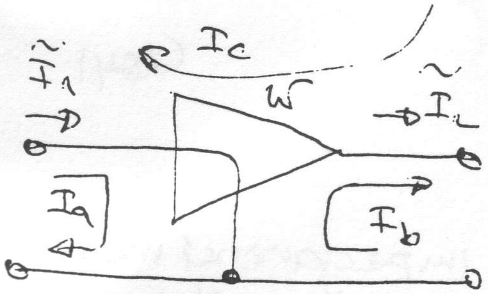
Medzi neregulárne prvky z hľadiska metódy slučkových prúdov zaraďujeme tie prvky, ktorých ~~admitančná~~ impedančná matica $\mathbf{Z}$ neexistuje. V rámci nášho kurzu sa tu budeme zaoberať ideálnymi OZ, konvertormi (vrátane špeciálnych prípadov – transformátor, ZURN) a PLN.).

3.1.1. Obvody s IOZ



obr. 83

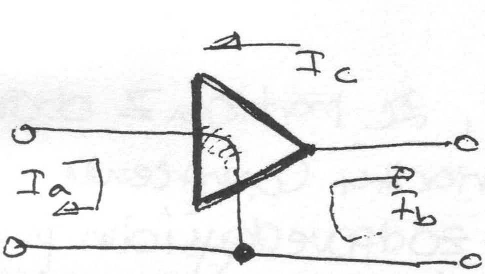
IOZ s jednou svorkou dostaneme zo ZNRP (obr. 83), tak, že $W\to\infty$. Nech je OZ zapojený v sústave tak, že sa ho dotýkajú 3 prúdy I_a, I_b a I_c (obr. 85). Prevedieme najskôr impedančnú maticu ZNRP



obr. 84

$$\begin{bmatrix}\tilde{U}_1\\ \tilde{U}_2\end{bmatrix}=\overbrace{\begin{bmatrix}0 & 0\\ W & 0\end{bmatrix}}^{Z'}\begin{bmatrix}\tilde{I}_1\\ \tilde{I}_2\end{bmatrix} \qquad (159)$$

do súradníc sústavy v ktorej leží IOZ. (obr. 84) Potom, použitím transformačných rovníc



obr. 85

$$\tilde{I}_1 = I_a - I_c \qquad \tilde{I}_2 = I_b - I_c \qquad (160)$$

sa parameter W dostane do nasledujúcich políčok matice impedančnej matice sústavy podľa obr. 84:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} a:(\tilde{1}) & b:(\tilde{2}) & c:(-\tilde{1})(-\tilde{2}) \end{array}\\ \begin{array}{c} a:(\tilde{1})\\ b:(\tilde{2})\end{array} & \begin{bmatrix} & & \\ \pm W & & \mp W \end{bmatrix}\end{array} \qquad (170)$$

Ľubovoľný algebraický doplnok matice Z (označme ho Δ) môžme rozložiť podľa parametra W takto:

$$\Delta' = \Delta - W \Delta_{b:a}^{(b>c;a>c)} \qquad (162)$$

kde bez ' sú algebraické doplnky matice Z, v ktorej sme vynechali parameter W a

$$\Delta_{b:a}^{(b>c;a>c)}$$

je algebraický doplnok prvku v b-tom riadku a a-tom stĺpci matice, ktorú dostaneme z matice Z (bez prvku W) tak, že b-tý riadok pripočítame k c-tému riadku a a-tý stĺpec pripočítame k c-tému stĺpcu.

Nakoľko obvodové funkcie počítame ako podiel dvoch algebraických doplnkov, napr.

$$F = \frac{\Delta'}{\tilde{\Delta}'} = \frac{\Delta - W \Delta_{b:a}^{(b>c:a>c)}}{\Delta - W \tilde{\Delta}_{b:a}^{(b>c:a>c)}} \qquad (163)$$

dostaneme pre $W \to \infty$ (kedy Z NRP prechádza v IOZ),

$$F = \frac{\Delta_{b:a}^{(b>c:a>c)}}{\tilde{\Delta}_{b:a}^{(b>c:a>c)}} \qquad (164)$$

To ale znamená, že IOZ transformuje impedančnú maticu Z'' sústavy bez zosilňovača na maticu Z podľa vzťahu:

$$Z = Z''^{(b>c;a>c)}_{b:a} \qquad (165)$$

Symbolika použitá vo vzťahu (165) hovorí, že matica Z dostaneme z matice Z'' tak, že prvky v b-tom riadku (označenie v zátvorke naľavo od :) pripočítame k zodpovedajúcim prvkom v c-tom riadku a b-tý riadok vynecháme. Prvky v a-tom stĺpci (označenie napravo od :) pripočítame k zodpovedajúcim prvkom v c-tom stĺpci a a-tý stĺpec vynecháme.

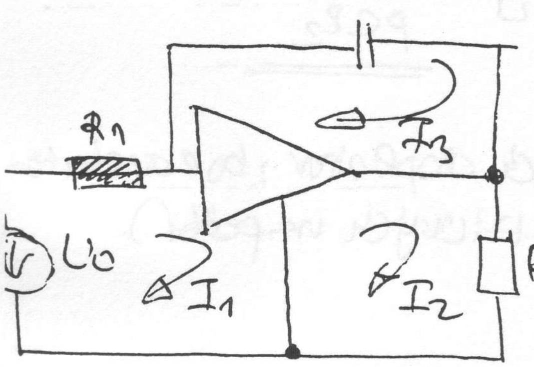
Ak v sústave neexistuje nezávislá slučka c, potom sa transformačný predpis (165) zjednoduší na výraz

$$Z = Z''_{b:a} \qquad (166)$$

+ -

t.j.: v matici sústavy Z'' bez OZ vynecháme b-tý riadok a a-tý stĺpec.

Príklad 10.



Obr. 86.

Pre obvod podľa obr. 86, vypočítajte prenos prúdov
$$k_I = I_2/I_1 .$$

Riešenie:

Pre impedančnú maticu sústavy podľa obr. 86, bez uváženia vplyvu OZ dostávame:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1: & 2: & 3: \end{array} \\ \begin{array}{c} 1: \\ Z = 2: \\ 3: \end{array} & \left[\begin{array}{c|c|c} R_1 & & \\ & R_2 & \\ & & +1/pC \end{array}\right] \end{array}$$

Využitím transformácii (105) obdržíme maticu, impedančnú opisujúcu sústavu podľa obr. 86:

$$Z'' = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} & \left[\begin{array}{cc} 0 & R_1 \\ R_2 & -1/pC \end{array}\right] \end{array} = Z''_{2:1}(2 \to 3 : 1 \to 3)$$

Pre prúd I_2 potom platí:

$$I_2 = \frac{\Delta_{1:2}}{\Delta} U_0 \quad \text{kde} \quad \Delta_{1:2} = 1/pC \qquad \Delta = -R_1 R_2$$

t.j.
$$I_2 = \frac{1}{pCR_1R_2} U_0 .$$

Pre prenos prúdov $k_I = I_2/I_1$ potom dostávame:

$$k_I = I_2/I_1 = \Delta_{1:2}/\Delta_{1:1} = \frac{-1/pC}{-(-R_2)} = \frac{1}{-pR_2C} =$$

$k_I = I_2/I_1 = I_2/(I_1) \quad \Delta_{1:2}$

Zárer riešenia, možno modifikovať tak, že použijeme viacnásobné algebraické doplnky:

$$K_i = \frac{I_2}{I_1} = \frac{\Delta_{1:2}}{\Delta_{1:1}} = \pm\frac{\Delta_{1:2}}{\Delta_{1:3}} = \frac{\tilde{\Delta}^{[2\,2\,3:1\,2\,2]}_{2\,1:1\,2}}{\tilde{\Delta}^{[2\,2\,3:1\,2\,2]}_{2\,1:1\,3}} = \frac{-1}{pCR_2}$$

(Spôsob výpočtu viacnásobných algebraických doplnkov, bol diskutovaný v kapitole nazvanej metódou uzlových napätí).

iné riešenie:

IOZ obdržíme z ZNRP podľa obr. 83, pre $W \to \infty$, ktorého impedančnú maticu pre $W < \infty$ poznáme:

$$\tilde{Z} = \begin{array}{c} \\ \tilde{1}: \\ \tilde{2}: \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \tilde{1}: & \tilde{2}: \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ W & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Táto matica sa do matice Z'' transformuje takto:

$$\tilde{I}_1 = I_1 \qquad \tilde{I}_2 = I_2$$

t. j.

$$Z'' = \begin{array}{c} \\ 1(a) \\ 2(b) \\ 3(c) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1(a) & 2(b) & 3(c) \end{array} \\ \begin{bmatrix} R_1 & & \\ -W & R_2 & W \\ W & & 1/pC - W \end{bmatrix} \end{array}$$

Potom pre prúd I_2 platí:

$$I_2 = (\Delta_{1:2}/\Delta)U_0 \;; \quad \Delta_{1:2} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -W & W \\ W & 1/pC - W \end{vmatrix} = -(-W/pC + W^2 - W^2) = -W/pC$$

$$\Delta = R_1R_1(1/pC - W) = R_1R_2/pC - WR_1R_2$$

z čoho:

$$I_2 = WpC U_0 (R_1R_2/pC - WR_1R_2)$$

re OZ platí: $W \to \infty$, t.j. pre I_2 dostávame:

$$i_2 = \lim_{W\to\infty} \frac{U_0\, W/pC}{W\left(\frac{R_1R_2}{Wpc} - R_1R_2\right)} = -\frac{1}{pCR_1R_2}U_0$$

Podobne možno vypočítať prenos prúdu $K_I = I_2/I_1 = \Delta_{1:2}/\Delta_{1:1}$

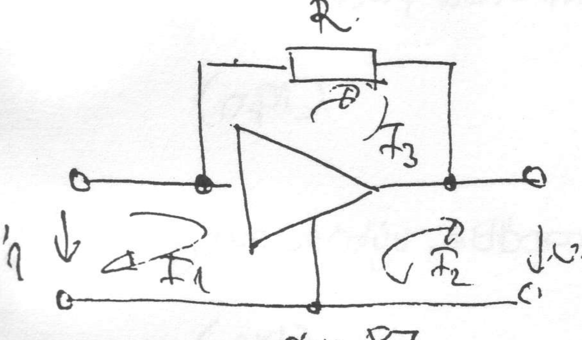
kde

$$\Delta_{1:1} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} R_2 & W \\ 0 & -W+1/pC \end{vmatrix} = R_2/pC - WR_2$$

takto po dosadení dostávame: (pre OZ)

$$i_I = \lim_{W\to\infty} \frac{1/pC}{R_2/Wpc - R_2} = -\frac{1}{pCR_2}$$

Poznámka.



obr. 87

Pre impedančnú maticu obvodu podľa obr. 87 platí:

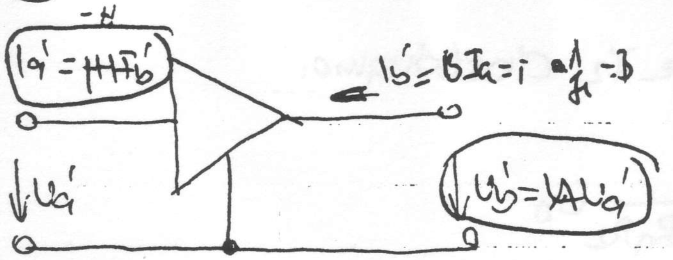
$$\tilde{Z} = Z^{[3>2-3>1]} = \begin{array}{c|cc} & 1: & 2: \\ \hline 1: & 0 & 0 \\ 2: & R & 0 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

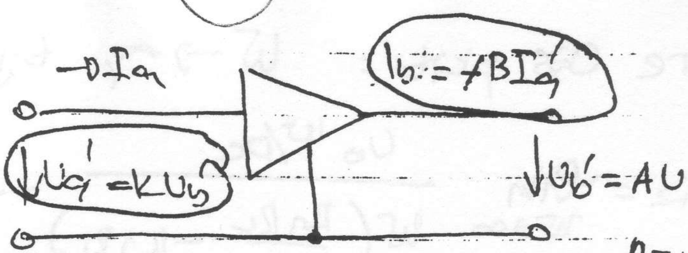
Matica Z-tu reprezentuje impedančnú maticu ZPRN, v dôsledku toho, obvod podľa obr. 87 predstavuje model ZPRN.

3.1.2. Obvody s konvertormi. (2.3.3)

V tejto skupiny radíme obvody s ideálnymi meničmi, ktoré obvody NIK žiadny z uvedených prvkov nemá impedančnú maticu. Môžeme ich tiež pokladať za transformátor súradníc (prúdu a napätia), pretože u týchto obvodových prvkov existuje jednoznačný vzťah medzi prúdom I_2 (napätím U_2) na výstupnej bráne a prúdom I_1 (napätím U_1) na vstupnej bráne (obr. 88, 89).



Obr. 88 $A, -H$



$K, -B$ Obr. 89

Ik podľa obr. 88/89 transformujú pôvodné prúdy I' na I podľa vzťahu

$$I' = CI \qquad \tilde{I} = CI \qquad (167)$$

kde počet prúdov I je o jeden prúd menší ako počet prúdov $\tilde{I}$ (pretože výstupný prúd Ik je lineárne závislý od vstupného prúdu Ai) ten istý prúd transformuje napätie tak, že platí:

$$U = DU' \qquad U = D\tilde{U} \qquad (168)$$

kde U sú nové a U' pôvodné napätia je.

$$U = DZ'CI = ZI \qquad (169)$$

z čoho pre impedančnú maticu po transformácii platí:

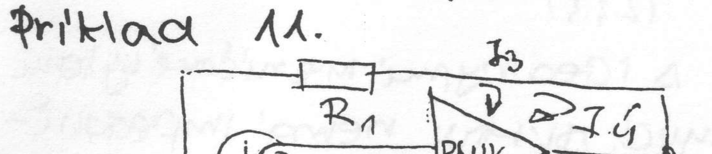
$$Z = DZ'C \qquad (170)$$

Keď sa transformuje prúd v inom pomere ako napätie, výkon nie je konštantný a preto vo všeobecnosti neplatí:

$$D^T = C \qquad (171)$$

Nenulové prvky matíc C a D sa vo všeobecnosti môžu líšiť od hodnoty 1. Maticu D dostaneme z matice C tak, že najskôr transformujeme maticu C a potom nahradíme prevody prúdu zodpovedajúcimi prevodmi napätia.

Príklad 11.



Obr. 90.

Pre obvod uvedený na obr. 90, zostavte impedančnú maticu.

Riešenie:

(63)

a. Zostavenie impedančnej matice sústavy bez T a PNIK

$$Z = \begin{array}{c|c} & (1') \quad (2') \quad (3') \quad (4') \\ \begin{array}{c}(1')\\(2')\\(3')\\(4')\end{array} & \left[\begin{array}{c:c:c:c} & & & \\ & & & \\ & & R_2 & -R_2 \\ & & & R_1 \end{array}\right] \end{array}$$

b, Transformácia impedančnej matice tranzistora do matice Z

$$\tilde{I}_1 = I_1' - I_4'$$
$$\tilde{I}_2 = I_4' - I_2'$$

$$Z_T = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{array}{cc|c} & & (\tilde{1}) \quad -(\tilde{2}) \quad \quad -(\tilde{1})\,(\tilde{2}) \\ (1') & (\tilde{1}) & \\ (2') & -(\tilde{2}) & \\ (3') & & \\ (4') & -(\tilde{1})\,(\tilde{2}) & \end{array} \left[\begin{array}{c:c:c:c} z_{11} & -z_{12} & & -z_{11}+z_{12} \\ -z_{21} & z_{22} & & -z_{22}+z_{21} \\ & & R_2 & \\ -z_{11}+z_{21} & z_{12}-z_{22} & & R_1+z_{11}-z_{12}-z_{21}+z_{22} \end{array}\right]$$

. Transformácia impedančnej matice PNIK-u do Z_1 – zavedenie závislých prúdov a napätí so súčasnou redukciou počtu súradníc.

$$I_1' = I_1 \qquad I_3' - I_4' = B(I_2' - I_4')$$
$$I_2' = I_2 \qquad I_3' - I_3 = B(I_2 - I_3)$$
$$I_4' = I_3 \qquad I_3' = BI_2 + (1-B)I_3$$

$$I_1' = I_1$$
$$I_2' = I_2$$
$$I_3' = BI_2 + (1-B)I_3$$
$$I_4' = I_3$$

transformácia

$$\begin{array}{c|c} & (1') \qquad (2')\;B(3') \qquad (1-B)\,(3')\;(4') \\ \begin{array}{c}(1)\;(1)\\ (2)\;(2')\;K(3') \\ (3)\;(1-K)(3')\;(4')\end{array} & \left[\begin{array}{c:c:c} z_{11} & -z_{12}+B & -z_{11}+z_{12} \\ -z_{21} & z_{22}+KBR_2 & -z_{22}+z_{21}+R_2K(1-B) \\ -z_{11}+z_{21} & B(1-K)R_2+z_{12}-z_{22} & R_1+z_{11}-z_{12}-z_{21}+z_{22}+R_2(1-B)(1-K) \end{array}\right] \end{array}$$

2.3.1.3. Obvody so zdrojom prúdu riadeného ~~napätím~~ prúdom. $\boxed{K=0}$

Zdroj prúdu riadený prúdom dostaneme z imitančného konvertora (obr. 89) pre $K=0$. Pri analýze postupujeme tak, ako u imitančného konvertora. ~~Prenos~~ prevod napätia napätia z výstupu na vstup je ale nulový ($K=0$).

2.3.1.4. Obvody so zdrojom napätia riadeného napätím $H=0$

ZNRN dostaneme z IK (obr. 89) ak $H=0$, t.j. ak prenos prúdu z výstupnej brány na vstupnú ~~bránu~~ prevod prúdu je nulový.

2.3.1.5. Obvody so zdrojom prúdu riadeným napätím.

ZPRN nemá impedančnú maticu a nie je to ani zvláštny prípad IK. Možno ho však pokladať za zvláštny prípad gyrátora (nesúmerného), ktorý má admitančnú maticu danú vzťahom

$$Y=\begin{bmatrix} 0 & S_1 \\ -S_2 & 0 \end{bmatrix} \qquad (172)$$

admitančnú maticu ZPRN dostaneme z predchádzajúcej matice tak, že $S_1 \to 0$ a $-S_2=S$. Impedančnú maticu Z dostaneme inverziou matice Y, t.j.

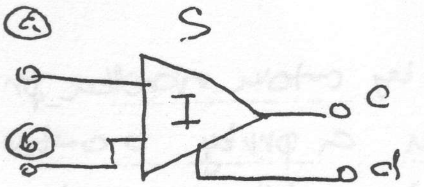
$$Z=Y^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & -1/S_2 \\ 1/S_1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (173)$$

a opäť $S_1 \to 0 \Rightarrow 1/S_1 \to \infty$ a $-1/S_2=S$. Jednoduchšie bude, ak na analýzu obvodov použijeme ZPRN → použijeme metódu uzlových napätí.

2.3.2 Metóda uzlových napätí.

Medzi neregulárne obvodové prvky z hľadiska metódy uzlových napätí radíme OZ, IK, ZNRN, ZPRP a ZNRP. Všetky uvedené prvky (okrem posledného) môžeme pokladať za transformátory súradníc. DIOZ (obr. 91) dostaneme napr. ako limitný prípad diferenčného zdroja prúdu riadeného napätím, keď $S \to \infty$. Ak je DIOZ – D-ZPRN zapojený tak, že vstupný pár svoriek je pripojený k uzlom (a) a (b)

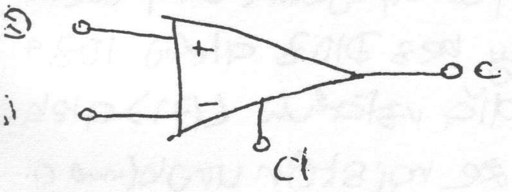
a ... k uzlom c, d (obr. ...) ...



Obr. 91

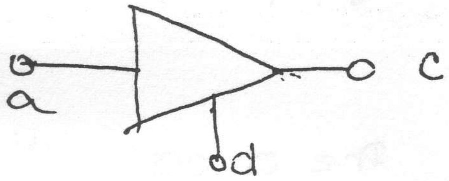
$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$$
$$\lambda_2 = \lambda_c = S\,u_{ab} \qquad (144)$$

Na základe týchto rovníc môžeme zostaviť úplnú admitančnú maticu $\overset{*}{Y}$ takto:



Obr. 92

$$\overset{*}{Y} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} & & & \\ & & & \\ S & -S & & \\ -S & S & & \end{array}\right] \end{array} \qquad (144')$$



Obr. 93

Každý algebraický doplnok Δ úplnej admitančnej matice možno rozvinúť podľa parametra S. Potom preň dostaneme:

$$\Delta = \tilde{\Delta} + S\,\tilde{\Delta}_{c:a}^{[c>a:\,a>b]} \qquad (175)$$

…de $\tilde{\Delta}$ označuje doplnok matice, bez parametra S. Pretože každá …ková funkcia sa rovná podielu dvoch algebraických doplnkov, …jde pre $S \to \infty$ (v čitateli i menovateli) vzťah (175) na

$$\Delta \to \tilde{\Delta}_{c:a}^{[c>a:\,a>b]} \qquad (176)$$

…ôsme ako v predošlom odseku. To ale znamená, že DIOZ …nsformuje maticu sústavy Y bez DIOZ na maticu Y takto:

$$Y = \tilde{Y}_{c:a}^{[c>a:\,a>b]} \qquad (177)$$

… jednoduchý OZ (obr. 93), kde

$$b = d \qquad (178)$$

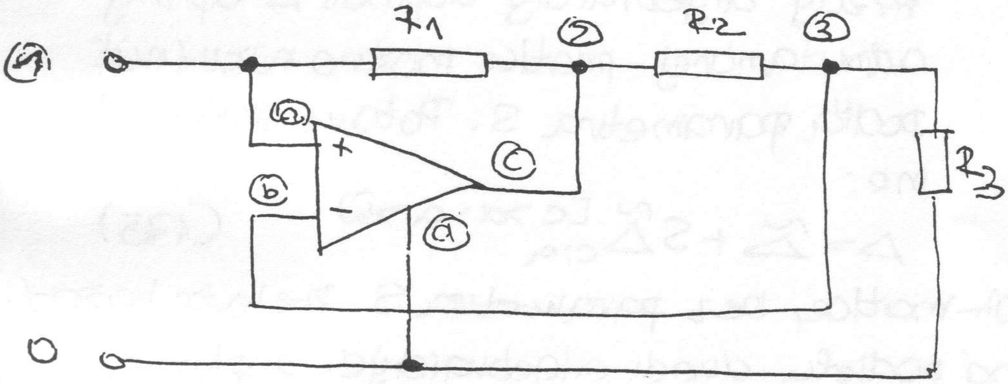
potom vzťah (177) zmení na

$$Y = \check{Y}_{c:a}^{[c>b:\,a>b]} = Y_{b:b}^{[b>c:\,b>a]}\left[\,Y_{c:a}^{[c>b;\,a>b]}\right] \qquad (179)$$

Pravú stranu rovnice (174) interpretujeme tak, že prvky c-tom riadku pripočítame k zodpovedajúcim prvkom v d-tom riadku a prvky v a-tom stĺpci, pripočítame k zodpovedajúcim prvkom v b-tom stĺpci, a nakoniec vynecháme riadok c a stĺpec a.

Pri analýze obvodov s DIOZ alebo IOZ postupujeme tak, že najskôr zostavíme admitančnú maticu sústavy bez DIOZ alebo IOZ a potom urobíme transformáciu súradníc podľa vzťahu (177) alebo (179). Pri analýze môžeme postupovať i tak, že najskôr urobíme analýzu so ZPRV, ktorého admitančná matica je daná vzťahom (174'), výsledné vzťahy, obdržíme nakoniec ako limitný prípad pre $S \to \infty$

Príklad 12.



obr. 94

Pre obvod podľa obr. 94. vypočítajte vstupnú impedanciu.

Riešenie.

Riešenie: 1. spôsob

a, admitančná matica bez DIOZ:

$$
Y = \begin{array}{c} (1)(a) \\ (2)(c) \\ (3)(b) \\ (0)(d) \end{array}
\overset{\begin{array}{cccc} (1)(a) & (2)(c) & (3)(b) & 0(d) \end{array}}{\left[\begin{array}{cccc}
G_1 & -G_2 & & \\
-G_1 & G_1+G_2 & -G_2 & \\
 & -G_2 & G_2+G_3 & -G_3 \\
 & & -G_3 & G_3
\end{array}\right]}
$$

kde

$$Z_{vst} = \Delta_{1,1} / \Delta$$

transformáciu súradníc podľa (174) urobíme tak, že riadok c vynecháme (a je spojená so vzťažným uzlom) a stĺpec b pripočítame k stĺpcu a, nakoniec stĺpec b vynecháme. Tým dostaneme

$$Y = s(b) \begin{bmatrix} \ldots & \ldots & -G_1 \\ G_2+G_3 & & -G_2 \end{bmatrix}$$

k čomu: $\Delta_{1:1} = -G_2$ $\quad \Delta = -G_1 G_2 + G_1(G_2+G_3) = G_1 G_3$

a teda

$$Z_{ust} = -\frac{G_2}{G_1 G_3} = -\frac{R_1 R_3}{R_2}$$

Druhý spôsob riešenia:

V obvode podľa obr. 94 namiesto DIOZ uvažujeme DZPRN. Najskôr vypíšeme admitančnú maticu obvodu bez DZPRN a potom do tejto admitančnej matice, do príslušných polí vpíšeme prvky matice DZPRN uvedeným spôsobom dostaneme

$$\begin{array}{ccc} & & 1(a) \quad\quad 2(c) \quad\quad 3(b) \\ Y = & \begin{array}{cc} (1) & (a) \\ (2) & (c) \\ (3) & (b) \end{array} & \begin{bmatrix} G_1 & -G_1 & \\ -G_1+S & G_1+G_2 & -G_2-S \\ & -G_2 & G_3+G_2 \end{bmatrix} \end{array}$$

o ktorej pre Z_{ust} platí:

$$Z_{ust} = \Delta_{1:1}/\Delta$$

a ktorého:

$$\Delta_{1:1} = \begin{vmatrix} G_1+G_2 & -G_2-S \\ -G_2 & G_3+G_2 \end{vmatrix} = (G_1+G_2)(G_2+G_3) - G_2^2 - G_2 S =$$

$$= G_1(G_2+G_3) + G_2 G_3 - G_2 S$$

$$\Delta = G_1(G_1+G_2)(G_3+G_2) + G_1(G_2+G_3)(S-G_1) - G_1 G_2(G_2+S) =$$
$$= G_1 G_2 G_3 + S G_1 G_3$$

$$Z_{ust} = \lim_{S\to\infty} \frac{\Delta_{1:1}}{\Delta} = \lim_{S\to\infty} \frac{G_1(G_2+G_3) + G_2 G_3 - S G_2}{G_1 G_2 G_3 + S G_1 G_3} = -\frac{G_2}{G_1 G_3} = -\frac{R_1 R_3}{R_2}.$$

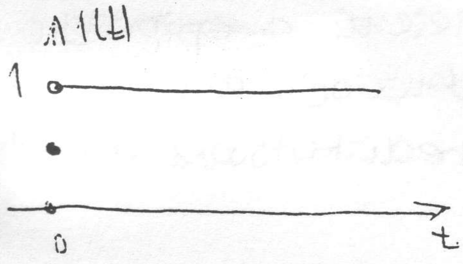
5. Riešenie prechodových javov v linearizovaných obvodoch.

Prechodovým javom rozumieme prechod z jedného ustáleného stavu do druhého. Narušenie ustáleného stavu môže byť spôsobené buď zmenou budiaceho signálu, alebo zmenou štruktúry analyzovanej sústavy obvodov. Najčastejším druhom zmeny napájacieho napätia /zdroja signálu je zmena skokom. Pretože sa môže meniť napájacie napätie alebo napájací prúd, uvažujeme všeobecnú skokovú fciu, /všeobecnú zmenu budiacej/napájacej veličiny skokom.

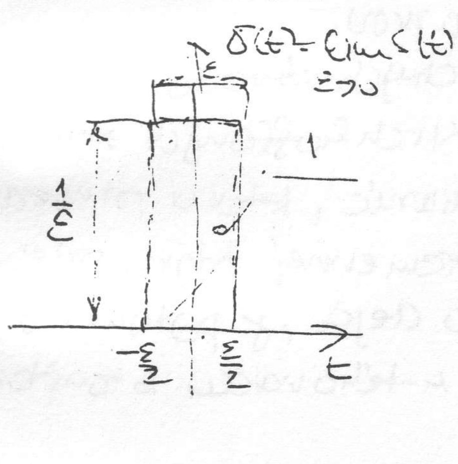
Zo súboru nekonečnej množiny skokových funkcií má veľký význam funkcia, opísaná vzťahom

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{pre } t<0 \\ 1 & \text{pre } t>0 \\ 1/2 & \text{pre } t=0 \end{cases} \qquad (186)$$

ktorej priebeh je naznačený na obr. 114. Táto funkcia býva v literatúre označovaná (niekedy) ako jednotkový skok (alebo tiež Heavisideova skoková fcia, distribúcia). Odpoveď (odozva) výstupného napätia (prúdu) prenosového článku na jednotkový skok napätia (prúdu) na vstupných svorkách sa nazýva prechodovou charakteristikou $(h(t))$ lineárneho obvodu. Ďalšou dôležitou funkciou/signálom, ktorý nachádza aplikácii v oblasti riešenia prechodových javov v lineárnych obvodoch, je tzv. Diracov impulz (jednotkový impulz), ktorý je matematicky definovaný tzv. Diracovou delta-funkciou $\delta(t)$ s nasledujúcimi vlastnosťami:



Obr. 114



Obr. 115.

$$\delta(t) = \begin{cases} \neq 0 & \text{pre } t=0 \\ 0 & \text{inač} \end{cases} \qquad (187)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1 \qquad (188)$$

signál opísaný vzťahmi (187) a (188) možno odvodiť ako limitný prípad signálu súčin znázorneného na obr. 115. pre $\varepsilon \to 0$. Odpoveď lineárnej sústavy (sústavy elektronických obvodov) na signál, resp. vedúcej $\delta(t)$-funkcii, (jednotkovému impulzu), sa nazýva impulzná charakteristika (impulzová odpoveď) lineárnej sústavy.

Impulzová a prechodová charakteristika majú v teórii lineárnych veľký význam. Na tieto skutočnosť v stručnosti poukážem v stručnosti v tejto, i nasledujúcej kapitole. Podrobnejšie bude táto problematika diskutovaná v predmete ~~signály~~ a sústavy.

V rámci tejto kapitoly, ukážeme niektoré prístupy ~~poukážeme na aplikácii~~ riešenia prechodových dejov v lineárnych sústavách. Zatiaľ bude stručne opísaná tzv. klasická metóda, a použitie Laplaceovej a Fourierovej transformácie, ako aj použitie Duhamelových integrálov. Jednou z najefektívnejších metód riešenia prechodových javov v lineárnych sústavách je použitie metódy stavovej premennej (stavových premenných) nakoľko táto metóda je východiskom i na riešenie ~~a opis~~ prechodových dejov v nelineárnych zotrvačných obvodoch, ako aj na ich opis, tak táto metóda bude podrobne diskutovaná v predmete Nelineárne analógové obvody.

5.1. Klasická metóda riešenia prechodových javov.

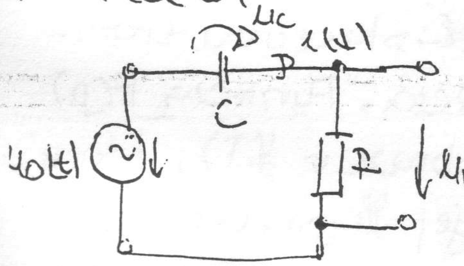
Riešenie prechodových javov v sústave elektrických obvodov klasickou metódou, vychádza z toho, že pomocou Kirchhoffových zákonov zostavíme sústavu integrodiferenciálnych rovníc, ktorú prevedieme derivovaním na diferenciálnu rovnicu tej premennej, ktorej priebeh máme požadované stanoviť. Riešenie prechodového deja, je potom vo všeobecnosti riešením diferenciálnej rovnice n-tého rádu s konštantnými koeficientami, danej vzťahom

$$b_n\frac{d^n y(t)}{dt^n}+b_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\dots+b_1\frac{dy(t)}{dt}+b_0y(t)=a_m\frac{d^m x(t)}{dt^m}+a_{m-1}\frac{d^{m-1}x(t)}{dt^{m-1}}+\dots+\frac{dx(t)}{dt}a_1+a_0x(t) \quad (189)$$

kde $x(t)$ je budiaca veličina (zdroj) a $y(t)$ je veličina (u, i) ktorej priebeh chceme stanoviť. Riešením rovnice (189) niektorou z metód riešenia diferenciálnych rovníc obdržíme všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice (189). Uplatnením počiatočných podmienok v obdržanom všeobecnom riešení, rovnice (189), obdržíme jej partikulárne riešenie, ktoré opisuje prechodový dej, ktorého priebeh chceme stanoviť. (Možno použiť i numerické metódy!).

Vzhľadom na to, že ~~ktoré~~ riešenie úloh tohoto typu bolo preberané v 1. a 2. ročníku, nebudeme sa touto problematikou podrobne zaoberať.

Príklad 24.



Obr. 116.

Pre jednoduchý derivačný obvod podľa Obr. 116, zostavme diferenciálne rovnice, umožňujúce výpočet prúdu $i(t)$, ako aj napätí $u_C(t)$ a $u_r(t)$.

Riešenie:

Výpočet prúdu:

$$u_C(t) + i(t)R = u_0(t)$$

$$\frac{1}{C}\int i(t)\,dt + i(t)R = u_0(t) \quad / \frac{d}{dt}$$

$$R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}i(t) = \frac{du_0(t)}{dt};$$

Výpočet napätia $u_C(t)$:

$$u_C(t) + i(t)R = u_0(t)$$

$$u_C(t) + C\frac{du_C}{dt}R = u_0(t)$$

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C(t) = u_0(t)$$

Výpočet $u_r(t)$:

$$\frac{d(Ri(t))}{dt} + \frac{1}{RC}(Ri(t)) = \frac{du_0(t)}{dt}$$

$$\frac{du_r(t)}{dt} + \frac{1}{RC}u_r(t) = \frac{du_0(t)}{dt}$$

Iné riešenie:

$$u_r(t) = u_0 - u_C(t)$$

2. Operátorová metóda riešenia prechodových javov. Aplikácia Laplaceovej transformácie.

Nech funkcia $f(t)$ spĺňa tieto podmienky:

a, na intervale $t \in \langle 0, \infty)$ je po častiach spojitá

b, Existujú také reálne čísla c_0, a M, že pre všetky $t \in \langle 0, \infty)$ platí:

$$|f(t)| < e^{c_0 t} M$$

Potom možno pre túto funkciu vypočítať ~~jej obraz~~ integrál

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} \, dt \qquad (186)$$

Rovnica (186) predstavuje tzv. priamu Laplaceovu transformáciu časovej funkcie $f(t)$ do komplexnej roviny p. Laplaceova transformácia je lineárna integrálna transformácia. Funkcia $F(p)$ sa nazýva obrazom funkcie $f(t)$ (Laplaceov obraz v LT), ktorá sa nazýva originál. Výpočet funkcie $f(t)$ z jej Laplaceovho obrazu, umožňuje použitie SPÄTNEJ LAPLACEOVEJ TRANSFORMÁCIE, ktorá je definovaná vzťahom

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(p) e^{pt} \, dp \qquad (187)$$

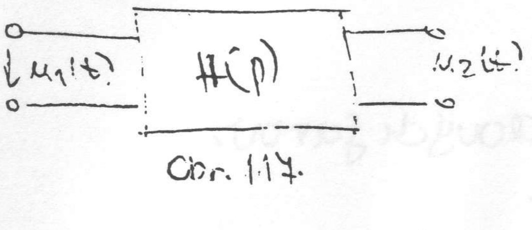
Vzťah medzi originálom funkcie $f(t)$ a jeho operátorovým (Laplaceovým) obrazom $F(p)$ budeme zapisovať vzťahom

$$f(t) \triangleq F(p) \qquad (189)$$

Pre priamu a spätnú Laplaceovu transformáciu budeme používať tieto symboly:

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)] \qquad f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)] \qquad (188)$$

Uvažujme teraz lineárnu sústavu budenú vstupným signálom $u_1(t)$ a s odpoveďou (s výstupným signálom) $u_2(t)$.



Obr. 117.

Potom, medzi Laplaceovým obrazom (napätia) vstupného signálu ~~signál~~ sústavy $U_1(p)$ a Laplaceovým obrazom odpovede sústavy platí nasledujúci vzťah:

$$U_2(p) = H(p) \, U_1(p) \qquad (189)$$

Funkciu $H(p)$ možno zo vzťahu (189) vyjadriť takto:

$$H(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} \qquad (190)$$

...unkciu $H(p)$, definovanú vo vzťahu (190) ako pomer Laplaceových obrazov ...povede sústavy a vstupného signálu sústavy, nazývame PRENOSOVOU FUNK...CIOU SÚSTAVY.

Predpokladajme teraz, že vstupným signálom sústavy je signál v tvare ...racovej δ funkcii $\delta(t)$. Potom pre Laplaceov obraz odpovede sústavy platí:

$$...(p) = H(p)\,U_1(p) = H(p)\,\mathcal{L}[u_1(t)] = H(p)\,\mathcal{L}[\delta(t)] = H(p)\cdot 1 = H(p) \qquad (191)$$

...vzťahu (191) vidieť, že Laplaceov obraz impulzovej odpovede sústavy ...(o)značenovanú, že vstupným signálom je (Diracova funkcia) je rovný ...renosovej funkcii sústavy, t.j. platí:

$$h(t) \triangleq H(p) \qquad (192)$$

...e $h(t)$ je impulzová odpoveď lineárnej sústavy.

Ak vstupným signálom sústavy je signál v tvare jednotkového skoku, tak ...Laplaceov obraz odpovede sústavy dostávame tento výraz:

$$...(p) = U_2(p) = H(p)\,U_1(p) = H(p)\,\mathcal{L}[1(t)] = H(p)/p = \frac{H(p)}{p} \qquad (193)$$

...vnica (193) hovorí, že medzi prenosovou funkciou $H(p)$ lineárnej sústavy ...aplaceovým obrazom prechodovej charakteristiky sústavy (odpoveď ...stavy na jednotkový skok) existuje jednoznačná súvislosť, daná ...zťahom

$$G(p) = H(p)/p \qquad (194)$$

...p.

$$H(p) = p\,G(p) \qquad (195)$$

...na vzťah (195) aplikujeme spätnú Laplaceovu transformáciu, tak ...zistíme, že medzi impulzovou a prechodovou charakteristikou ...lineárnej sústavy platí tento vzťah:

Vráťme sa teraz ku vzťahu (189). Na jeho ľavej strane je obraz operátorový výstupného signálu sústavy. Zodpovedajúci ~~je~~ ku originál je ku $u_2(t)$. Na pravej strane máme súčin obrazov $H(p)$ a $U_1(p)$. Ak na tento vzťah aplikujeme konvolučnú teorému, tak možno písať nasledujúce vzťahy:

$$U_2(p) = H(p)\,U_1(p) \doteq h(t) * u_1(t) = \int_0^t h(t-\alpha)\,u_1(\alpha)\,d\alpha = \int_0^t h(t)\,u_1(t-\alpha)\,d\alpha \quad (196)$$

$$\int_0^t h(\tau)\,u_1(t-\tau)\,d\tau \qquad \int_0^t u_1(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau$$

kde symbol $*$ označuje konvolučný vzťah. Zo vzťahu (196) vyplýva, že odpoveď sústavy v čase $t_0 = t$ možno vypočítať ako konvolúciu impulzovej charakteristiky sústavy a vstupnej (budiacej) veličiny. Potom pre odpoveď sústavy platí:

$$u_2(t) = h(t) * u_1(t) = \int_0^t h(t-\alpha)\,u_1(\alpha)\,d\alpha = \int_0^t h(t)\,u_1(t-\alpha)\,d\alpha \quad (197)$$

5.3. DUHAMELOVE INTEGRÁLY

Uvažujme dvojbran podľa obr. 114. s nulovými počiatočnými podmienkami. Medzi Laplaceovým obrazom odpovede sústavy $U_2(p)$ a Laplaceovým obrazom vstupného napätia (signálu) $U_1(p)$ platí vzťah (189). Dosadením (194) do (189), kde

$$G(p) = \mathcal{L}\,[\,g(t)\,] \quad (198)$$

dostávame pre odpoveď sústavy $U_2(p)$ tento vzťah:

$$U_2(p) = p\,G(p)\,U_1(p) \quad (199)$$

Z Laplaceovej transformácie je známe, že súčinu obrazov zodpovedá konvolúcia originálov

$$X(p)\,Y(p) = x(t) * y(t) \quad (200)$$

Pri zmene derivácie originálu, vypočítame podľa vzťahu

Konvolúcia:

$$U_2(p) = H(p)\, U_1(p)$$

$$u_2(t) = h(t) * u_1(t) = u_1(t) * h(t)$$

$$u_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, u_1(t-\tau)\, d\tau$$

$$u_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

Špeciálny prípad: $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{pre } t<0 \\ \text{môže} & \text{pre } t \geq 0 \end{cases}$

$\sigma_1(t)$!

$$u_2(t) = \int_0^t h(\tau)\, u_1(t-\tau)\, d\tau$$

$$u_2(t) = \int_0^t u_1(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

pre $x(t) = 0$ $t<0$.

Duhamelove integrály

? $u_2(t) = \int_0^t h(\tau)\, u_1(t-\tau)\, d\tau$

$$u_2(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, h(t-\tau)$$

Konvolúcia:

74

$$U_2(p) = H(p)\, U_1(p)$$

$$u_2(t) = h(t) * u_1(t) = u_1(t) * h(t)$$

$$u_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, u_1(t-\tau)\, d\tau$$

$$u_2(t) = \int_{-\infty} u_1(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

Špeciálny prípad: $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{pre } t<0 \\ \text{inač} & \text{pre } t \geq 0 \end{cases}$

$\sigma_1(t)$!

$$u_2(t) = \int_0^t h(\tau)\, u_1(t-\tau)\, d\tau$$

$$u_2(t) = \int_0^t u_1(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

pre $x(t) = 0$ $t<0$.

Duhamelove integrály

? $u_2(t) = \int_0^t h(\tau)\, u_1(t-\tau)\, d\tau$

$$u_2(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)\, h(t-\tau)$$

$$p\,X(p) \doteq dx'(t) = \frac{dx(t)}{dt} \qquad (201)$$

Ak pravidlá (200) a (201) aplikujeme na vzťah (199), tak prechodný neboli odpoveď sústavy možno obrazit' tieto vzťahmi

$$u_2(p) = p\,G(p)\,U_1(p) \doteq \frac{d}{dt}[g(t) * u_1(t)] = \frac{d}{dt}\int_0^t g(\tau)\,u_1(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{d}{dt}\int_0^t g(t-\tau)\,u_1(\tau)\,d\tau =$$

$$= g(0)\,u_1(t) + \int_0^t g'(\tau)\,u_1(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= g(t)\,u_1(0) + \int_0^t g(\tau)\,u_1'(t-\tau)\,d\tau = \qquad (202)$$

$$= g(0)\,u_1(t) + \int_0^t g'(t-\tau)\,u_1(\tau)\,d\tau =$$

$$= g(t)\,u_1(0) + \int_0^t g(t-\tau)\,u_1'(\tau)\,d\tau = u_2(t)$$

Vzťahy medzi originálmi použitými vo vzťahu (202) sú známe ako tzv. Duhamelove integrály. Z (202) je zrejmé, že ich obdržíme derivovaním konvolučného integrálu podľa parametra t. Zo vzťahu (202) vidieť, že ak je známa prechodová charakteristika sústavy lineárnej sústavy $g(t)$, tak odpoveď sústavy (napr. $y(t)$) na budiacu funkciu $x(t)$ ($x(t)=0$ pre $t<0$), možno vypočítať podľa ~~[illegible]~~ ľubovoľného z nasledujúcich vzťahov:

$$y(t) = g(0)\,x(t) - \int_0^t g'(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau$$

$$y(t) = g(t)\,x(0) + \int_0^t g(\tau)\,x'(t-\tau)\,d\tau \qquad (203)$$

$$y(t) = g(0)\,x(t) + \int_0^t g'(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau$$

$$y(t) = g(t)\,x(0) + \int_0^t g(t-\tau)\,u_1'(\tau)\,d\tau$$

5.4. SPEKTRÁLNA METÓDA.

Predpokladajme, že funkcia $f(t)$ spĺňuje tieto podmienky: (tzv. Dirichletove podmienky)

a) $f(t)$ je absolútne integrovateľná, t.j. existuje také číslo M, že platí:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt < M < \infty \qquad (204)$$

b) $f(t)$ má v každom konečnom intervale konečný počet maxím a miním

c) $f(t)$ má na každom konečnom intervale konečný počet bodov nespojitosti

Potom možno pre funkciu $f(t)$ vypočítať integrál

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\,dt \qquad (205)$$

Rovnica (205) predstavuje tzv. priamu ~~Laplaceovu~~ Fourierovu transformáciu časovej funkcie $f(t)$ do spektrálnej (frekvenčnej) oblasti. Funkcia $F(j\omega)$ sa nazýva Fourierovým obrazom funkcie $f(t)$, ktorá sa nazýva originál. Funkcia $F(j\omega)$ je niekedy nazývaná tiež spektrálnou funkciou. Výpočet funkcie $f(t)$ z jej Fourierovho obrazu umožňuje použitie spätnej FOURIEROVEJ TRANSFORMÁCIE, ktorá je definovaná vzťahom

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)\, e^{j\omega t}\,d\omega \qquad (206)$$

Vzťah ~~medzi~~ medzi originálom funkcie $f(t)$ a jej operátorovým obrazom (Fourierovým obrazom) budeme zapisovať takto:

$$f(t) \triangleq F(j\omega) \qquad (207)$$

Pritom pre priamu a spätnú Fourierovu transformáciu budeme používať tieto symboly:

$$F(j\omega)=\mathcal{F}[f(t)] \qquad f(t)=\mathcal{F}^{-1}[F(j\omega)] \qquad (208)$$

Uvažujme teraz lineárnu sústavu podľa obr. 117. so vstupným signálom $u_1(t)$ a odpoveďou $u_2(t)$. Nech impulzová odpoveď ~~sústavy~~ sústavy je $h(t)$. Potom pre odpoveď ~~sústavy~~ sústavy platí:

$$u_2(t) = \int_0^t h(\tau)\, u_1(t-\tau)\, d\tau \qquad (209).$$

Ak na tento vzťah aplikujeme konvolučnú teorému, známu pre FT, tak pre Fourierov obraz odpovede lineárnej sústavy platí:

$$U_2(j\omega) = H(j\omega)\, U_1(j\omega) \qquad (210)$$

kde $\quad H(j\omega) = \mathcal{F}[h(t)],\ U_2(j\omega) = \mathcal{F}[u_2(t)],\ U_1(j\omega) = \mathcal{F}[u_1(t)] \qquad (211).$

Funkciu $U_1(j\omega)$ ($U_2(j\omega)$) nazývame spektrom vstupného signálu (odpovede) lineárnej sústavy. V prípade, že ~~signál~~ funkcia $x(t)$ je matematickým modelom signálu, tak jej Fourierov obraz nazývame spektrom (frekvenčným spektrom, Fourierovým spektrom) signálu $x(t)$. Fourierov obraz impulzovej charakteristiky lineárnej sústavy sa nazýva frekvenčnou charakteristikou lineárnej sústavy. Frekvenčná charakteristika sústavy je komplexná funkcia, komplexnej premennej $j\omega$. Preto ju môžme vyjadriť tiež v tejto forme:

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| \cdot e^{j\varphi(\omega)} \qquad (212)$$

kde $\quad \varphi(\omega) = \arg[H(j\omega)] \qquad (213)$

Funkciu $|H(j\omega)|$ nazývame amplitúdovou (modulovou) frekvenčnou charakteristikou lineárnej sústavy. Funkciu $\varphi(\omega)$ nazývame fázovou (argumentovou) charakteristikou frekvenčnou charakteristikou lineárnej sústavy. Dá sa ukázať, že frekvenčnú charakteristiku lineárnej sústavy možno odvodiť z prenosovej funkcie sústavy $H(p)$ ak, že v $H(p)$ dosadíme za $p = j\omega$, t. j.

$$H(j\omega) = H(p)\big|_{p=j\omega} \qquad (214)$$

Vráťme sa teraz k vzťahu (210), a aplikujme naň pre opätnú FT (206). Potom pre odpoveď lineárnej sústavy dostávame tento vzťah:

$$u_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U_1(j\omega)\, H(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \qquad (215).$$

Ak teda poznáme frekvenčnú charakteristiku sústavy, a spektrum vstupného signálu sústavy, tak potom na výpočet odpovede sústavy pre časový okamih $t_0 = t$ môžeme použiť vzťah (215).

Lineárne sústavy sú obyčajne opísané svojimi charakteristikami v časovej oblasti, v oblasti Laplaceovej transformácie ako aj vo frekvenčnej oblasti.

Spôsob opisu	Charakteristika / parameter
diferenciálna rovnica (lineárna, s konštantnými koeficientami)	koeficienty diferenciálnej rovnice
konvolúcia $h * x(t)$	impulzová odozva lineárnej sústavy $h(t)$
Duhamelové integrály	prechodová charakteristika lineárnej sústavy

Časovo-invariantní

Uvažujme lineárnu sústavu, a odpoveďou $y(t)$ a so vstupným signálom $x(t)$, potom môžme túto sústavu opísať pomocou tejto diferenciálnej rovnice

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \dot{x}(t) + b_0 x(t) \qquad (1)$$

Aplikovaním Laplaceovej transformácie na (1), môžme pre prenosovú funkciu sústavy odvodiť tento výraz:

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i p^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i p^i} \qquad (2)$$

(80)

Rovnicu (2) (vzťah (2)) môžme vyjadriť tiež v tejto forme

$$H(p) = K \frac{\prod_{i=1}^{m}(p - p_{i\sigma})}{\prod_{j=1}^{n}(p - p_{j\sigma})} \qquad K = \frac{b_m}{a_n} \qquad (3)$$

kde K - je konštanta, $p_{i\sigma}$ sú korene polynómu čitateľa a korene polynómu menovateľa prenosovej funkcie lineárnej
Zo vzťahu (3) ~~atď~~ je zrejmé, že platia nasledujúce vzťahy

$H(p_{i\sigma}) = 0$ pre $i = 1, 2, \ldots, m$ $(p_{i\sigma} \neq p_{j\sigma})$

$H(p_{j\sigma}) \to \infty$ pre $j = 1, 2, \ldots, n$ $(p_{i\sigma} \neq p_{j\sigma})$ (5)

Zo vzťahov ~~(4) a (5)~~ (3)-(5) vidieť, že v komplexnej rovine (p) sú také body, pre ktoré je $H(p) = 0$ a aj sú také body, pre ktoré H(p) rastie nad všetky medze. Také body komplexnej roviny (p) pre ktoré platí vzťah (4), nazývame NULAMI PRENOSOVEJ FUNKCIE. Také body ~~[illegible]~~ komplexnej roviny (p), pre ktoré H(p) rastie nad všetky medze, nazývame PÓLMI PRENOSOVEJ FUKCIE.

Vychádzajúc z týchto poznatkov, môžme spôsoby opisu lineárnej sústav v oblasti komplexnej roviny (p) zhrnúť v tejto tabuľke

SPÔSOB OPISU	Charakteristika/parameter
prenosová funkcia H(p) [racionálna lomená funkcia]	koeficienty čitateľa a menovateľa prenosovej funkcie
póly - nuly prenosovej funkcie (faktorizovaná prenosová funkcia)	K, $p_{i\sigma}$, $p_{j\sigma}$ (zisk, póly, nuly) (diagram pólov a núl prenosovej funkcie lineárnej sústavy) $K = \frac{b_m}{a_m}$

Poznámka:

Za predpokladu, že koeficienty $H(p)$ sú reálne, tak ~~póly resp.~~ nuly $H(p)$ môžu byť reálne, alebo musia existovať dvojice komplex. združených koreňov polynóm čitateľa alebo menovateľa prenosovej funkcie sústavy. Tieto korene môžu byť jednoduché, alebo viacnásobné.

Príklad:

Je sústava s prenosovou funkciou

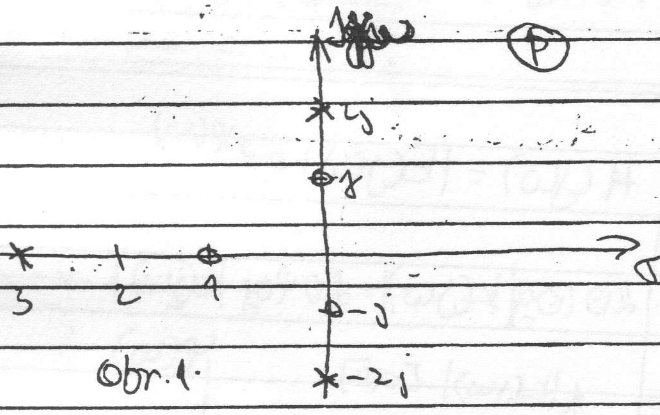
$$H(p) = \frac{p^3+p^2+p+1}{p^3+3p^2+4p+12}$$

Zostavte diagram pólov a núl.

Riešenie:

$$H(p) = \frac{p^3+p^2+p+1}{p^3+3p^2+4p+12} = \frac{p^2(p+1)+(p+1)}{p^2(p+3)+4(p+3)} = \frac{(p^2+1)(p+1)}{(p^2+4)(p+3)}$$

$$H(p) = \frac{(p+1)(p+j)(p-j)}{(p+3)(p-2j)(p+2j)} \quad ?$$

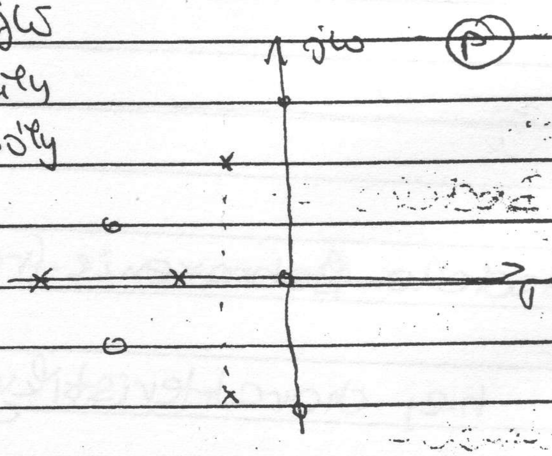


Obr. 1

$p = \sigma + j\omega$

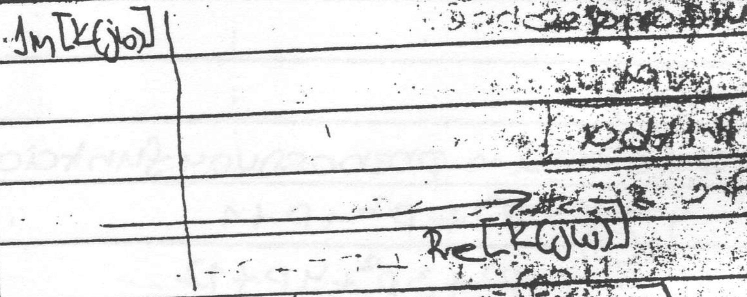
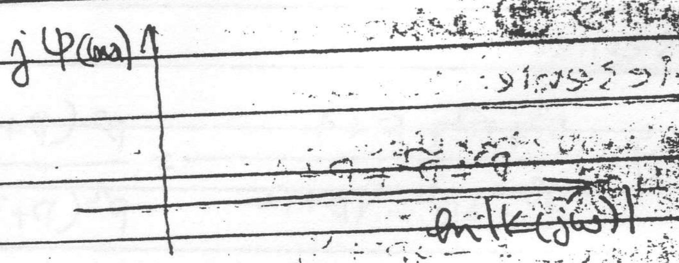
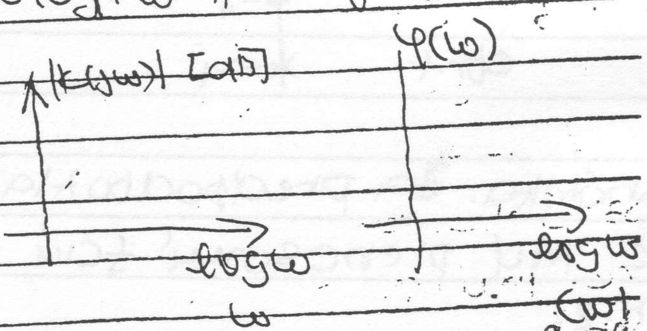
o .. nuly

x .. póly



Poznámka: Za predpokladu, že $\sigma \neq 0$, možno obdržať aj inú prenosovú fciu napr. diagram pólov a núl podľa obr. 2.

+ 3. Opis lineárnych sústav vo frekvenčnej oblasti

Typ frekvenčnej charakteristiky	Matematické formulácie, grafické znázornenie
NYQUISTOVA FREKV. CHARAKTERISTIKA (Nyquistovo zobrazenie frekvenčnej charakteristiky)	 $K(j\omega) = Re[K(j\omega)] + j\,Im[K(j\omega)]$
NICHOLSOVA FREKVENČNÁ CHARAKTERISTIKA (Nicholsove zobrazenie frekvenčnej charakteristiky)	 $K(j\omega) = \lvert K(j\omega)\rvert e^{j\varphi(\omega)}$ $\ln K(j\omega) = \ln\lvert K(j\omega)\rvert + j\varphi(\omega)$
Bodeho zobrazenie frekvenčnej charakteristiky. - amplitúdová frekvenčná charakteristika $\lvert K(j\omega)\rvert$ - fázová frekvenčná charakteristika.	$K(j\omega) = \lvert K(j\omega)\rvert e^{j\varphi(\omega)}$ $20\log\lvert K(j\omega)\rvert = 20\log\lvert K(j\omega)\rvert$ 

$$H(p)=\frac{B(p)}{A(p)}=\frac{\sum_{i=0} \ldots}{\sum_{i=0}^{m} a_i p^i}=K\frac{\prod_{i=1}(p-z_i)}{\prod_{i=1}^{m}(p-p_i)}$$

(83)

Predpokladajme, že koeficienty $H(p)$ sú reálne. Potom bude faktorizovaná forma $H(p)$ vyjadrená v tvare súčinu činiteľov, ktoré môžu mať tieto 4 formy:

A. Konštantná časť (k)

B. činiteľ p reprezentujúci koreň polynómu v počiatku súradnej sústavy.

C. Činiteľ $p+a$, reprezentujúci jednoduchý reálny koreň.

D. Činiteľ p^2+ap+b reprezentujúci pár komplexne združených koreňov.

Pre frekvenčnú charakteristiku sústavy potom platí:

$$H(j\omega)=K\frac{\prod_{i=1}^{m}(j\omega-z_i)}{\prod_{j=1}^{m}(j\omega-p_i)}=K\frac{\prod_{i=1}^{m}|j\omega-z_i|\,e^{j\varphi_i}}{\prod_{i=1}^{m}|j\omega-p_i|\,e^{j\psi_i}}$$

$$\varphi_i=\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{Im}[j\omega-z_i]}{\mathrm{Re}[j\omega-z_i]}\qquad \psi_i=\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{Im}[j\omega-p_i]}{\mathrm{Re}[j\omega-p_i]}$$

$$H(j\omega)=K\frac{\prod_{i=1}^{m}|j\omega-z_i|}{\prod_{i=1}^{m}|j\omega-p_i|}e^{j\left[\sum_{i=1}^{m}\varphi_i-\sum_{i=1}^{m}\psi_i\right]}$$

$$20\log|H(j\omega)|=20\log|K|+\sum_{i=1}^{m}20\log|j\omega-z_i|-\sum_{i=1}^{m}20\log|j\omega-p_i| \quad (A)$$

$$\varphi(\omega)=\sum_{i=1}^{m}\varphi_i-\sum_{i=1}^{m}\psi_i \quad (B)$$

komplexne združené: $20\log|(j\omega-z_i)(j\omega-\bar{z}_i)|$

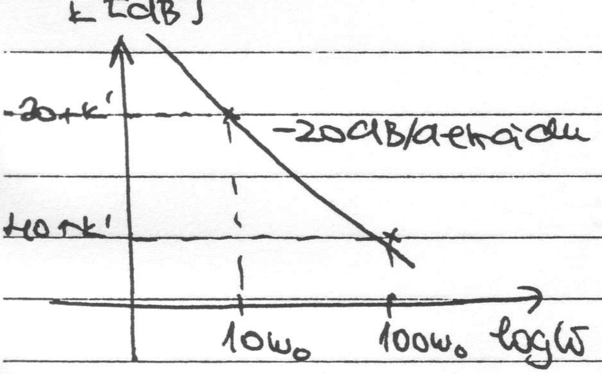
Poznámka o jednotke dB.

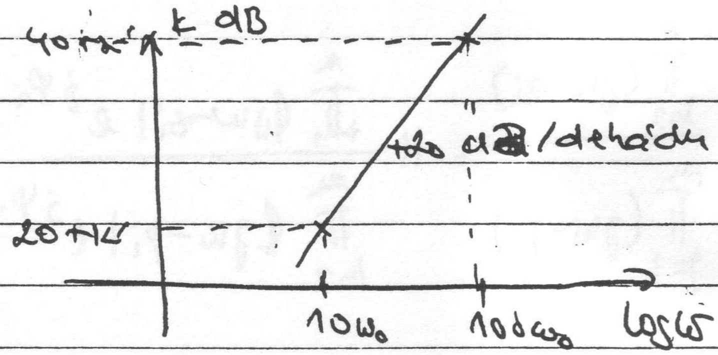
$$K_{u\,dB} \qquad u\,dB = 20 \log \frac{u_{out}}{u_{in}}$$

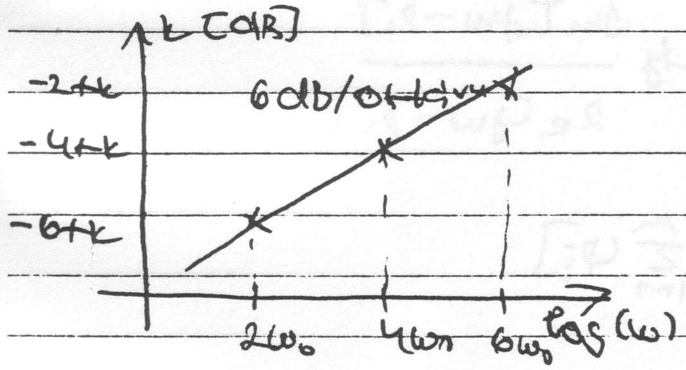
1 dB ≈	zmena o 10%	12 dB ≈	4 : 1	60 dB ≈	1000 : 1
3 dB ≈	zmena o 1,4 (~~30%~~)	20 dB ≈	10 : 1	70 dB ≈	3000 : 1
10 dB	3 : 1	40 dB ≈	100 : 1	80 dB ≈	10 000
6 dB	2 : 1	50 dB ≈	300 : 1		

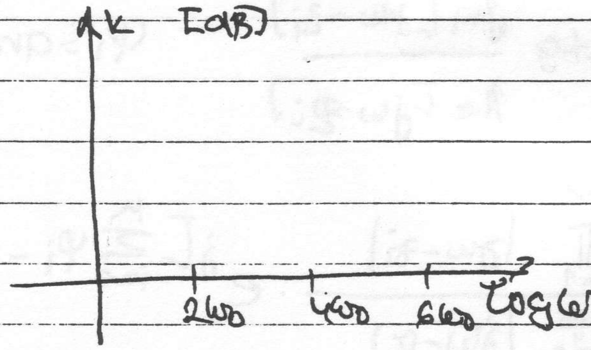
Poznámka o strmosti frekvenčnej charakteristiky.

Strmosť frekvenčnej charakteristiky je definovaná výrazom k dB / oktávu (/dekádu). Oktáva (dekáda) je interval frekvencií ⟨f, 2f⟩, (⟨f, 10f⟩).









...oznamovacej techniky, technickej kybernetiky a automatizácii sa veľmi často používa asymptotická aproximácia frekvenčných charakteristík lomenými čiarami.

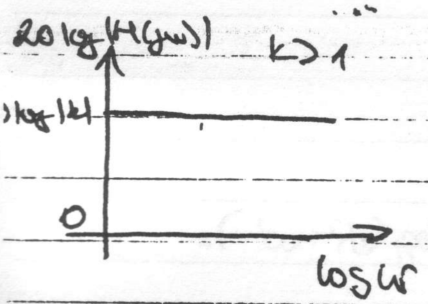
Uvažujme prenosovú funkciu EO H(p) vyjadrenú vo faktorizovanej forme:

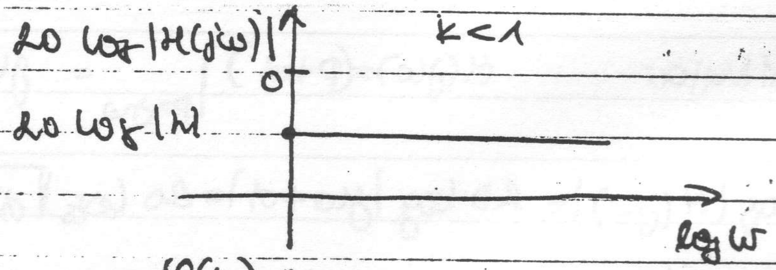
Zo vzťahov (A) a (B) plynie, že AFCH a FFCH sa rovnajú súčtu "príspevkov" jednotlivých činiteľov k celkovej AFCH a FFCH. Vzhľadom na to, sa budeme zaoberať príspevkami vyššie spomenutých 4 činiteľov, a to za predpokladu, že sa jedná o póly alebo o nuly.

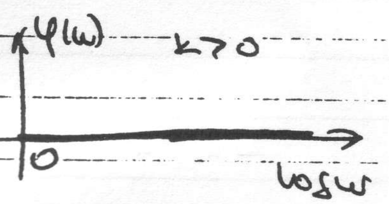
$H(j\omega) = k$;

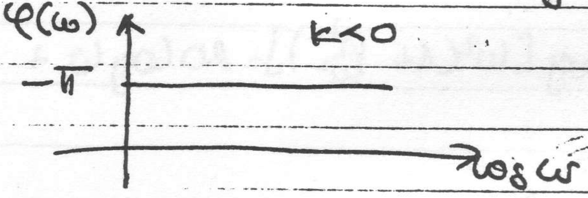
$20\log|H(j\omega)| = 20\log k$; $\quad k>1 \Rightarrow 20\log k > 0 \Rightarrow \varphi = 0$

$0<k<1 \Rightarrow 20\log k < 0 \Rightarrow \varphi = -180^\circ (-\pi)$









A: Pól. $\quad H(j\omega) = \frac{1}{p}\Big|_{p=j\omega}$ $\qquad$ B: Nula: $\quad H(j\omega) = p\,\Big|_{p=j\omega}$

$20\log|H(j\omega)| = 20\log\left|\frac{1}{j\omega}\right| = -20\log\omega$,

$\varphi_1(\omega) = -\pi/2$; (-90°)

$20\log|H(j\omega)| = 20\log|j\omega| = 20\log\omega$

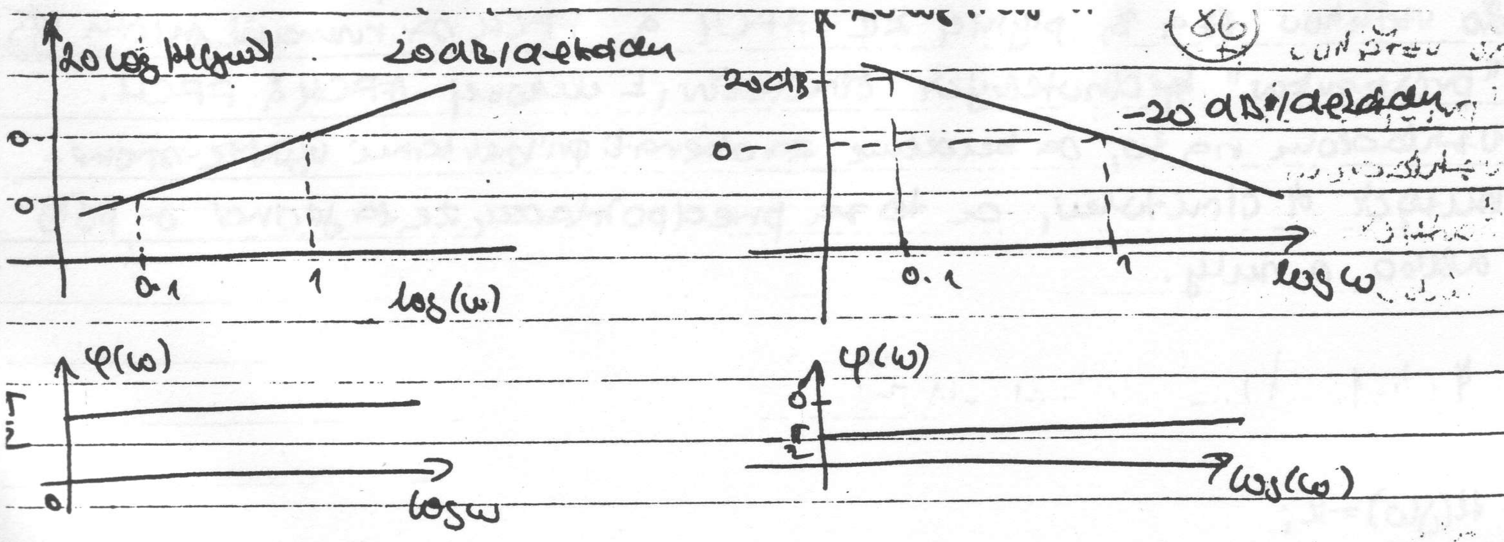
$\varphi_2(\omega) = \pi/2$; 90°

Strmosť charakteristiky:

$20\log|H(j\omega_1)| - 20\log|H(j\omega_2)| = 20\log\frac{10\omega}{\omega} = 20\log 10 = 20$ dB [dekádu]

$20\log|H(j\omega_1)| + 20\log|H(j\omega_2)| = -20\log\frac{10\omega}{\omega} = -20$ dB/dekádu.

$20\log|H(j\omega_1)| - 20\log|H(j\omega_1)| = 20\log\frac{2\omega}{\omega} = 20\log 2 = 6$ dB/oktávu



1 – Człon $(p+\alpha)$ reprezentujący jednokrotny rzeczywisty zerowy.

– nula: $H(j\omega)=(p+\alpha)\Big|_{p=j\omega} = j\omega+\alpha$

$20\log|H(j\omega)| = 20\log|j\omega+\alpha| = 20\log\sqrt{\alpha^2+\omega^2} = 10\log(\alpha^2+\omega^2) =$

$= 10\log\left[\omega^2\left(1+\frac{\alpha^2}{\omega^2}\right)\right] = 20\log\omega + 10\log\left(1+\frac{\alpha^2}{\omega^2}\right)$

a) $\alpha \gg \omega$;

$20\log|H(j\omega)| = 20\log(\alpha^2+\omega^2) \approx 20\log\alpha \qquad \varphi(\omega)=0°.$

b) $\alpha \ll \omega$

$20\log|H(j\omega)| \approx 20\log\omega \qquad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}$ (90°).

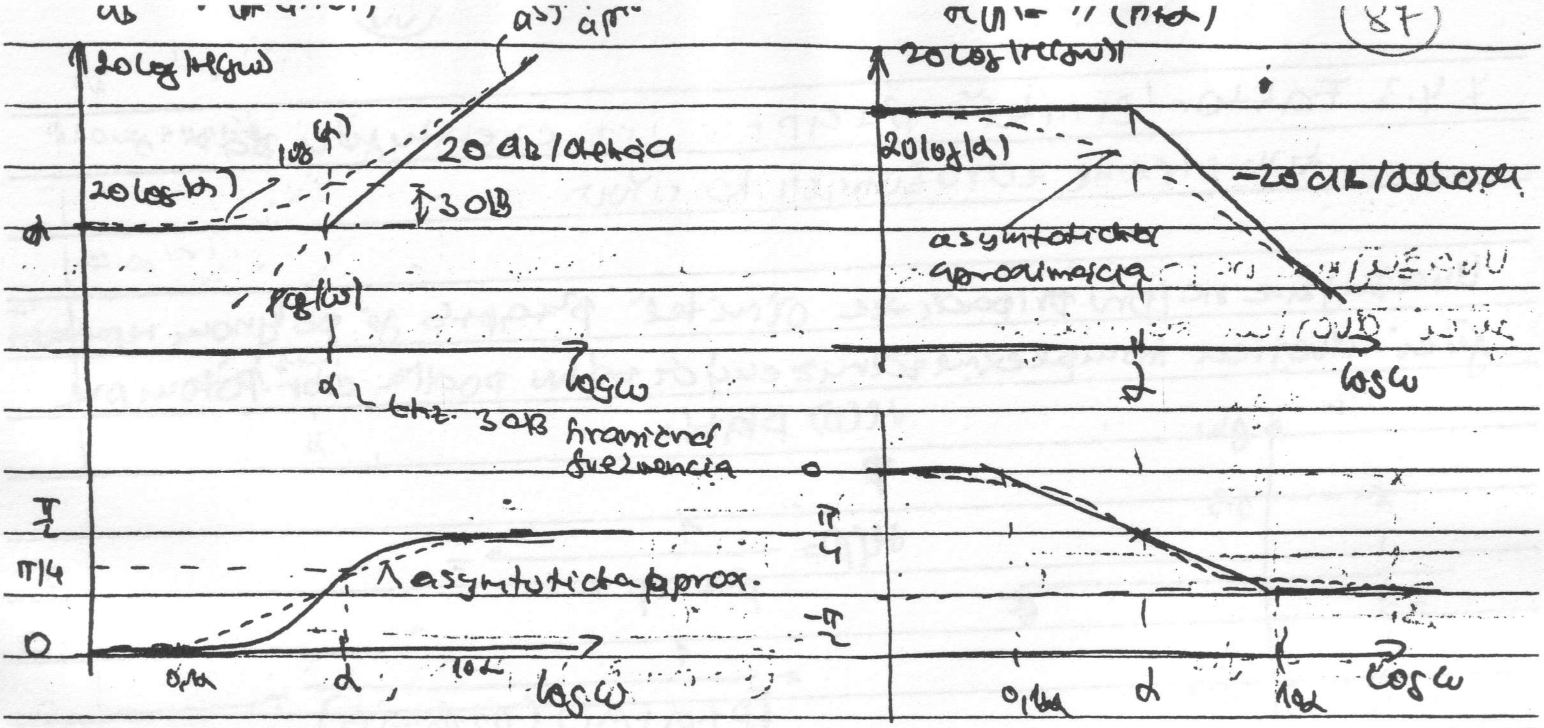
stromość: 20 dB/dekadę

c) $\alpha = \omega$

$20\log|H(j\omega)| = 20\log\sqrt{\alpha^2+\omega^2} = 20\log\sqrt{2}\,\omega = 20\log\omega + 20\log\sqrt{2} =$

$= 20\log\omega + 3\,\mathrm{dB}!$

$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\,\frac{\omega}{\alpha} = \mathrm{arctg}\,1 = \frac{\pi}{4}$



: $H(j\omega) = 1/(j\omega+\alpha)$

Vyjadrenia pre póls odvodíme podobne, avšak znamienka budú mať zápornú:

a). $\alpha \gg \omega$

$$20\log|H(j\omega)| = 20\log\left|\frac{1}{j\omega+\alpha}\right| = -20\log|j\omega+\alpha| = -20\log\sqrt{\alpha^2+\omega^2} \approx -20\log\alpha;$$

$\varphi(\omega) = 0$

b). $\alpha \ll \omega$

$$20\log|H(j\omega)| = 20\log\left|\frac{1}{j\omega+\alpha}\right| = -20\log\sqrt{\omega^2+\alpha^2} \approx -20\log\omega$$

$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2};\quad (90^\circ)$

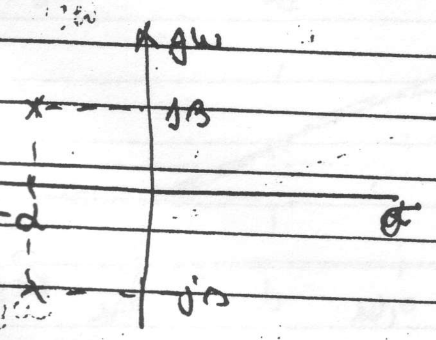
c). $\alpha = \omega$

$$20\log|H(j\omega)| = 20\log\left|\frac{1}{j\omega+\omega}\right| = -20\log 2\omega^2 = -20\log\omega - 3\,dB\ !$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{-\omega}{\omega} = \operatorname{arctg}(-1) = \underline{-\frac{\pi}{4}}$$

7.4.3 Faktor/činiteľ p^2+ap+b reprezentujúci pár komplexne združených koreňov.

Uvažujme najprv prípad, že činiteľ p^2+ap+b je polynóm reprezentujúci dvojicu komplexne združených pólov podľa obr. Potom pre $H(p)$ platí:



$$H(p)=\frac{1}{p^2+ap+b}=\frac{1}{(p+\alpha+\beta j)(p+\alpha-j\beta)}$$

$$=\frac{1}{p^2+p\alpha+\cancel{\beta jp}+\alpha p+\alpha^2+\cancel{j\beta\alpha}-\cancel{j\beta p}-\cancel{j\alpha\beta}+\beta^2}$$

$$=\frac{1}{p^2+\underbrace{2\alpha p}_{a}+\underbrace{(\alpha^2+\beta^2)}_{b}}=\frac{1}{p^2+2\alpha p+\omega_0^2}$$

kde $b=\omega_0^2=\alpha^2+\beta^2\geq 0!$

$$H(j\omega)=\frac{1}{(j\omega)^2+\underbrace{2\alpha j\omega}_{a}+\underbrace{\omega_0^2}_{b}}=\frac{1}{(b-\omega^2)+ja\omega}$$

a). $\omega^2 \ll b=\omega_0^2$ $\quad(\omega \ll b)\quad \to H(j\omega)\approx \frac{1}{b} > 0!$

$$20\log|H(j\omega)|=20\log\left|\frac{1}{(b-\omega^2)+ja\omega}\right|\approx 20\log\frac{1}{b}=-20\log(\omega_0^2)$$

$\varphi(\omega)=0.$

b). $\omega^2\gg b$, $\quad \omega^2\gg\omega_0^2$; $\omega^2\gg\omega$ $\qquad H(j\omega)\approx -\frac{1}{\omega^2}$

$$20\log|H(j\omega)|\approx 20\log\left|\frac{1}{-\omega^2}\right|=-40\log\omega;\quad \varphi(\omega)=-\pi$$

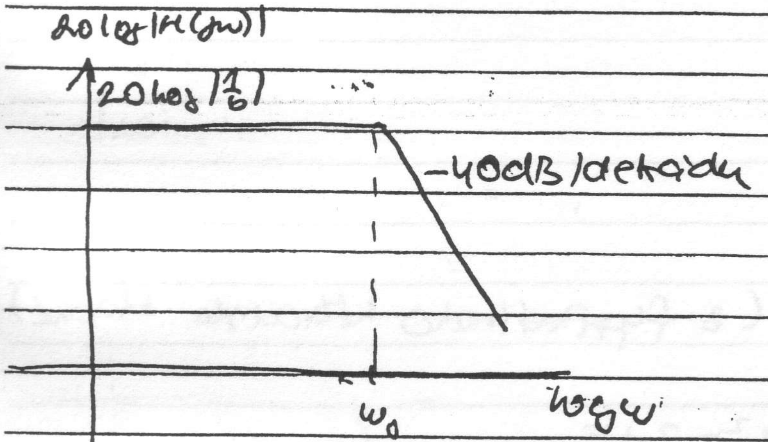
strmosť charakteristiky:

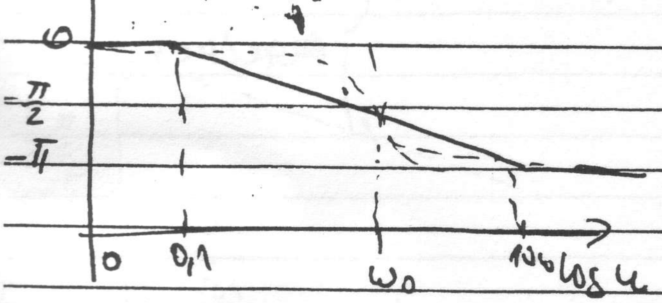
$$20\log|H(j10\omega)| - 20\log|H(j\omega)| = -40\log 10\omega + 40\log\omega =$$

$$= 40\log\frac{\omega}{10\omega} = 40\log\frac{1}{10} = -40\ dB/dekádu.$$

Fázová charakteristika pre $\omega = \omega_0$.

$$H(j\omega) = \frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)+2\alpha j\omega} = \frac{1}{(\omega_0^2-\omega_0^2)+2\alpha j\omega_0} = \frac{-j}{2\alpha\omega_0} \Rightarrow \varphi(\omega=\omega_0) = -\frac{\pi}{2}$$





Pre $|H(j\omega)|$ platí:

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{|(j\omega)^2+2\alpha j\omega+\omega_0^2|} = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\alpha^2\omega^2}}$$

Hľadáme teraz takú hodnotu ω, pre ktorú je $|H(j\omega)|$ maximálna. Z hľadiska na to musí platiť

$$\frac{d|H(j\omega)|}{d\omega} = 0!$$

$$\frac{d}{d\omega}|H(j\omega)| = \frac{d}{d\omega}\left|\frac{1}{(j\omega)^2 + 2\alpha j\omega + \omega_0^2}\right| = \frac{d}{d\omega}\left|\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}}\right|$$

$$\frac{d}{d\omega}\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2\right]^{-1/2} = -\frac{1}{2}\left[\underbrace{(\omega_0^2-\omega^2)^2}_{\geq 0} + \underbrace{4\alpha^2\omega^2}_{\geq 0}\right]^{-\frac{3}{2}} \cdot$$

$$\cdot \left[2(\omega_0^2-\omega^2)\cdot(-2\omega) + 8\alpha^2\omega\right] = 0$$

$$\omega\left[(\omega_0^2-\omega^2) - 2\alpha^2\right] = 0$$

$$\omega_{1,2} = \begin{cases} 0 \\ \omega_0^2 - \omega^2 = 2\alpha^2 \end{cases}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2}$$

Riešenia musia byť reálne (z fyzikálneho hľadiska hľadané)

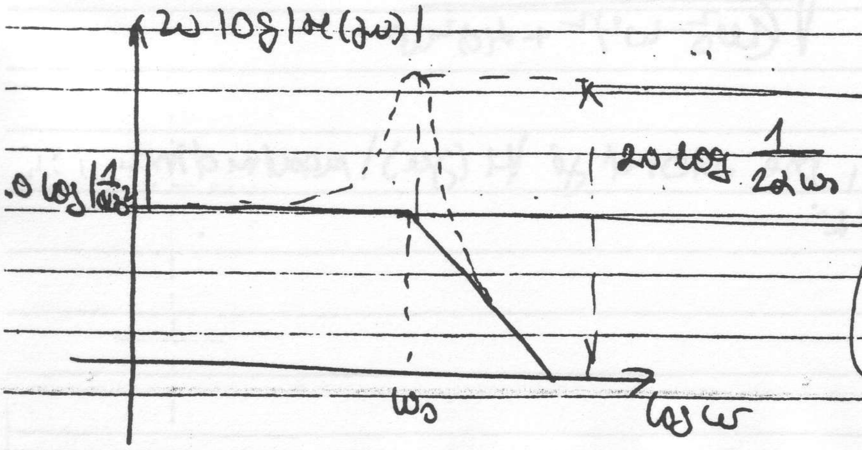
a) $\omega_0^2 > 2\alpha^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2}$
b) $\omega_0^2 \gg 2\alpha^2 \Rightarrow \omega \doteq \omega_0$
c) $\omega_0^2 \ll 2\alpha^2 \Rightarrow \omega = 0$

maxima.

Uvažujme najprv prípad b):

$\omega_0^2 \gg 2\alpha^2$

$$|H(j\omega_0)|^2 = \left|\frac{1}{-\omega_0^2 + j\omega_0 2\alpha + \omega_0^2}\right| = \frac{1}{2\alpha\omega_0} \qquad 20\log|H(j\omega)| = 20\log\frac{1}{2\alpha\omega_0}$$



$$20\log\frac{1}{2\alpha\omega_0} - 20\log\frac{1}{\omega_0^2} = 20\log\left(\frac{\omega_0}{2\alpha}\right)$$

$$2\alpha = \frac{\omega_0}{Q} \Rightarrow Q = \frac{\omega_0}{2\alpha}$$

$$20\log Q$$

Vzhľadom na posledný vzťah bude užitočné opísať prenosovú funkciu $H(p)$ v tejto forme:

$$H(p)=\frac{1}{p^2+\left(\frac{\omega_0}{Q}\right)p+\omega_0^2}$$

Na základe ktorej vieme priamo nakresliť Bodeho asymptotickú aproximáciu ich zodpovedajúcej amplitúdovej a fázovej frekvenčnej charakteristiky. Amplitúdové a fázové frekvenčné charakteristiky zodpovedajúce rôznym hodnotám Q sú naznačené na obr.